

Graphics with Processing



2023-09 投影変換と隠面消去

<https://vilab.org>

塩澤秀和

9.0 今回の話を要約

遠ざかると小さく見える

□ これは常識!

ではどれだけ小さくなるのか?



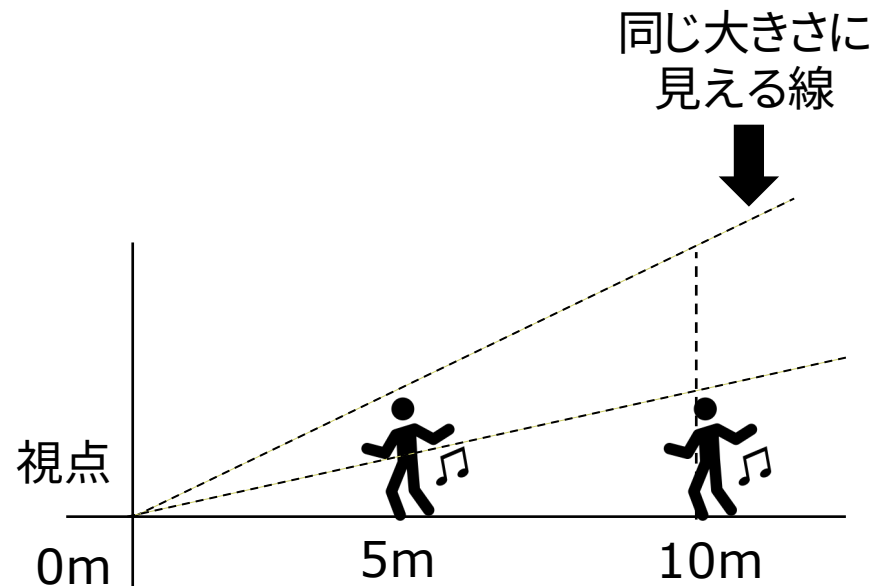
5m先



10m先

図を描けば分かる

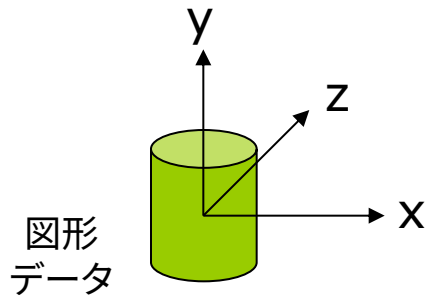
□ 真横から見ると...



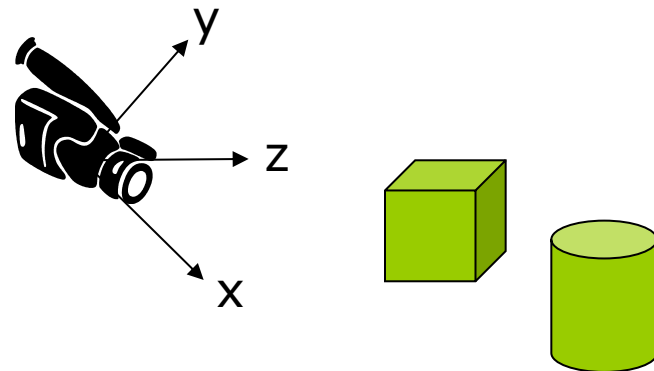
距離が2倍離れると、
大きさ(高さ)は元の
何分の1に見える?

8.1* 3DCGの座標系 (p.49)

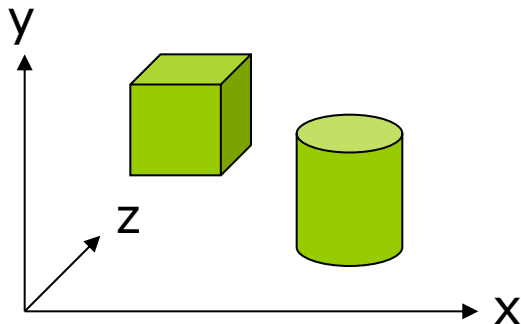
- ローカル(モデリング)座標系
 - オブジェクトの座標系



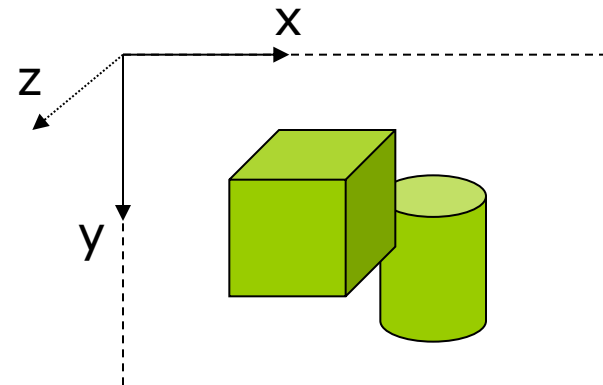
- 視点(カメラ)座標系
 - 遠近感や前後関係を計算



- ワールド座標系
 - 3次元世界の座標系

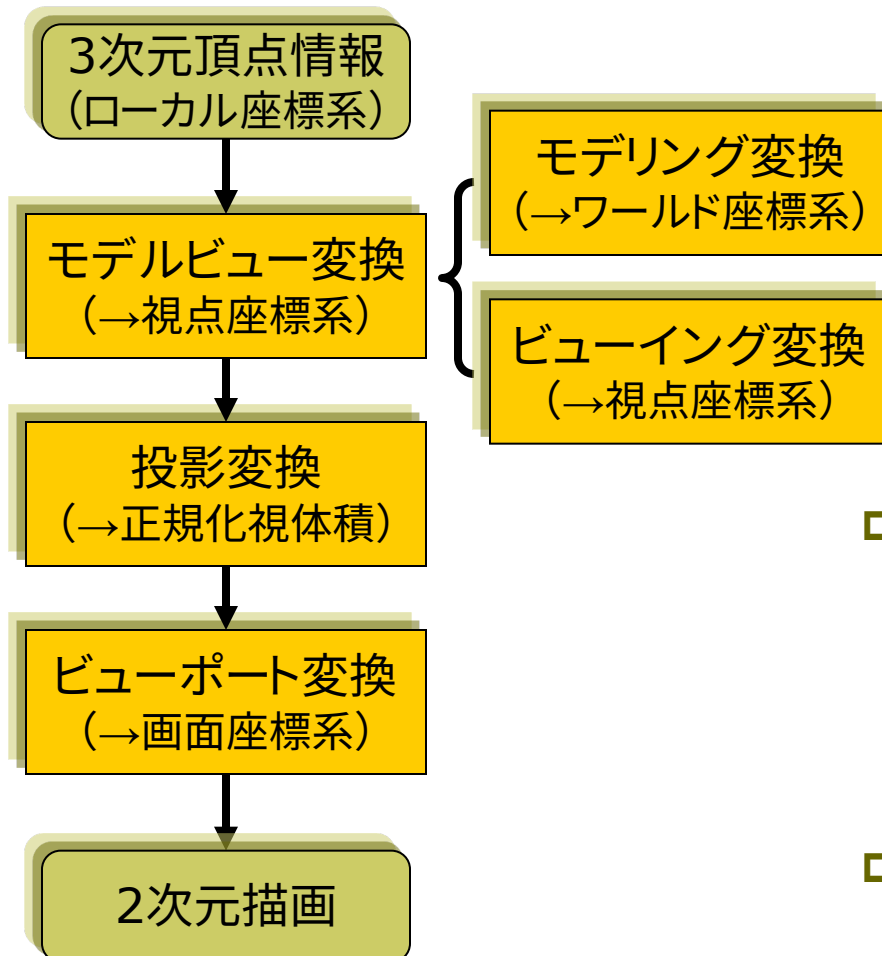


- 画面(デバイス)座標系



8.2* 3DCGの座標変換 (p.49)

□ ビューイングパイプライン



□ モデルビュー変換 (第8回)

- オブジェクト (3Dモデル) と視点 (カメラ) の位置関係の設定する
- モデリング変換:
各オブジェクトの配置
- ビューイング変換 (視野変換):
視点 (カメラ) の設定
- `translate()`, `scale()`,
`rotate{X,Y,Z}()`, `camera()`

□ 投影変換 (第9回)

- 空間全体を投影面での比率を表す正規化視体積へ変換
- 平行投影: `ortho()`
- 透視投影: `perspective()`

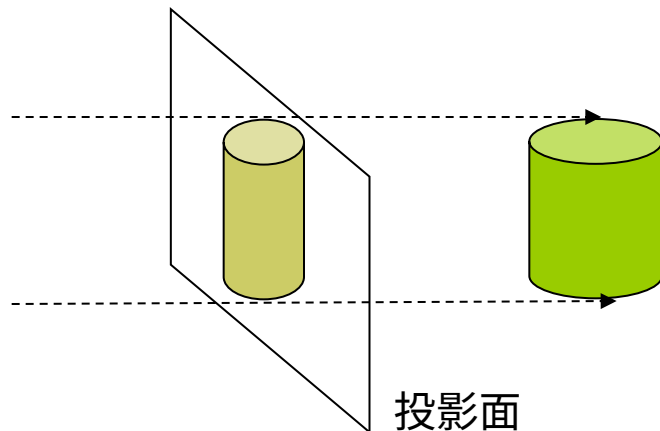
□ ビューポート変換

- 正規化視体積から画面座標へ

9.1* 平行投影と透視投影 (p.38)

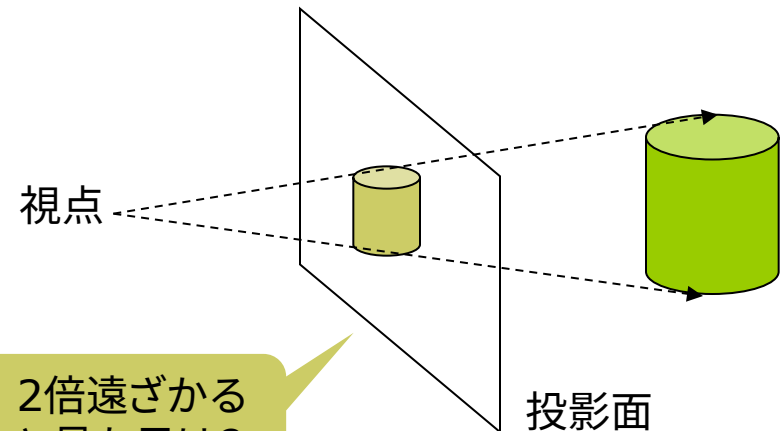
平行投影(直交投影)

- `ortho(xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax)`
- 遠近感をつけない投影方法
- 横・縦・奥行き方向の表示範囲(視体積)を設定する
- サンプル
 - Basics (3D) → Camera



透視投影(透視図法)

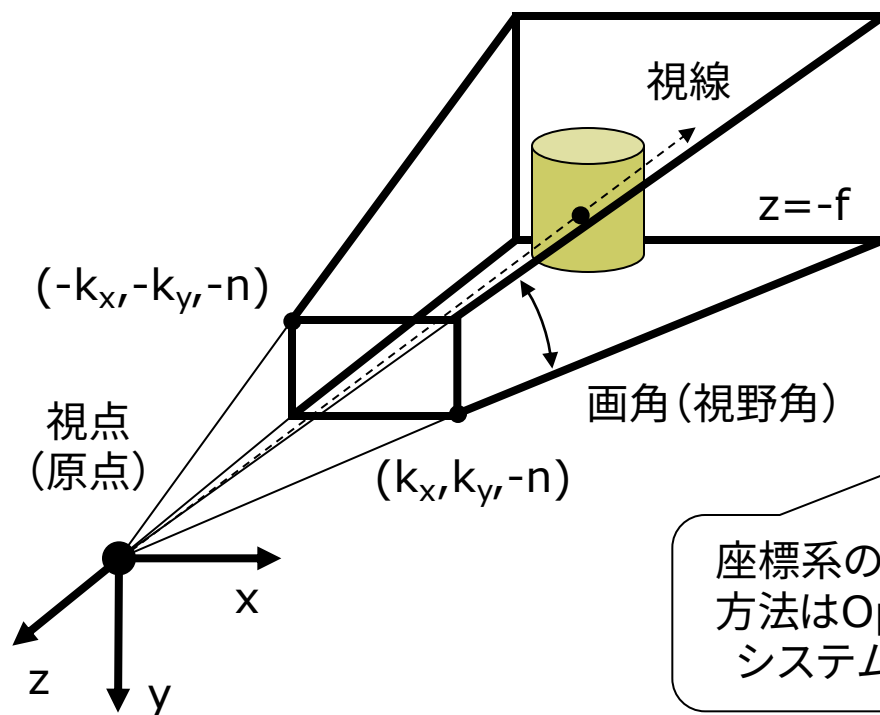
- `perspective()`
 - 人が実際に見るように、遠いものほど小さく描画する(遠近法)
 - 投影面に映る大きさが計算される
- `perspective(fov, aspect, near, far)`
 - 視野角と前後の距離を指定する



9.2* 透視投影 (p.39)

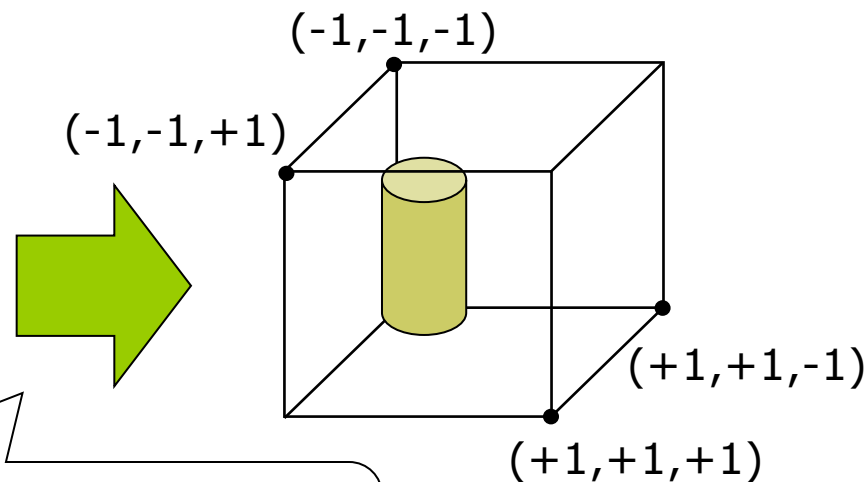
透視投影 (射影変換)

- 視体積 (ビューボリューム)
 - 視体積 = 「見える領域」
 - 透視投影の視体積は四角錐台
 - 画角大 = 広角 / 画角小 = 望遠



□ 正規化視体積

- 各座標を $-1 \sim +1$ に正規化する
- 四角錐台 \rightarrow 立方体の変形
- 視点から遠くなるほど、空間が圧縮され小さくなる \Rightarrow 遠近感
- z 座標は $0 \sim 1$ にする方式もある

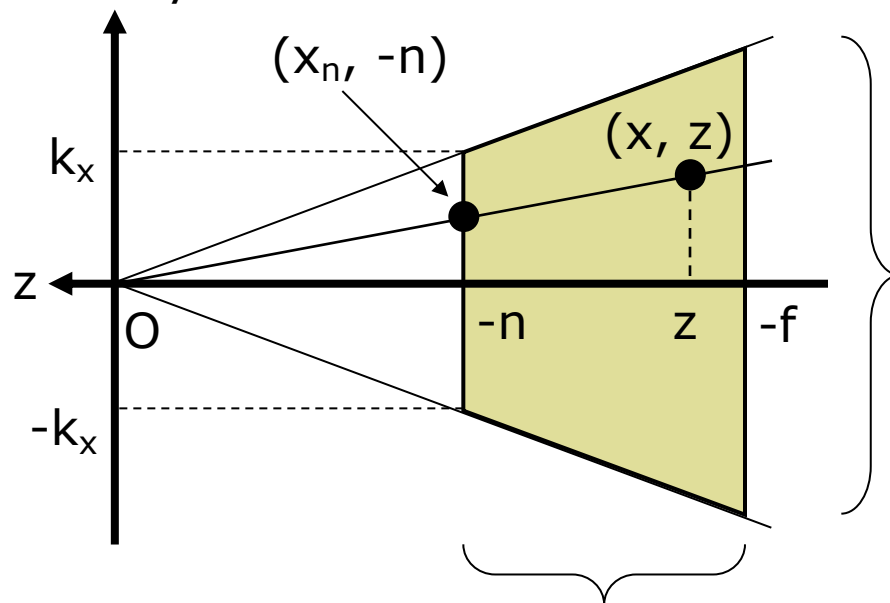


座標系の取り方や z 座標の計算方法は OpenGL, DirectX などシステムによって若干異なる

9.3* 透視投影の計算 (p.43参考)

視体積の正規化

x(またはy)



z座標も、-1~+1の範囲に収めるが、
x,y方向に合わせて距離(-z)で割るように
空間を縮める(直線は直線に変換される)

OpenGL/Processingの計算式
(教科書の方式は、0.0~1.0)

三角形の相似により(z<0に注意)

$$x_n : n = x : -z \quad (\text{y軸も同様})$$

$$\therefore x_n = x \cdot \frac{n}{-z}, \quad y_n = y \cdot \frac{n}{-z}$$

x,y座標を-1~+1の範囲に収める

$$x_p = \frac{x_n}{k_x} = \frac{n}{k_x} \cdot \frac{x}{-z}$$

$$y_p = \frac{n}{k_y} \cdot \frac{y}{-z}$$

視点からの
距離に反比例

$$z_p = -\frac{z(f+n) + 2fn}{-z(f-n)}$$

9.4 透視投影行列 (p.43参考)

□ 同次座標で表現

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \\ w'_p \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_p &= x'_p / w'_p \\ y_p &= y'_p / w'_p \\ z_p &= z'_p / w'_p \end{aligned}$$

9.3の式を同次座標で表す
分母にzがあるので $w'_p = -z$ に対応

$$x'_p = \frac{n}{k_x} x \quad y'_p = \frac{n}{k_y} y$$

$$z'_p = -\frac{f+n}{f-n} z - \frac{2fn}{f-n}$$

$$w'_p = -z$$

w'_p に視点からの
奥行き情報が残る

□ 透視投影行列

■ OpenGL/Processingの方式

$$\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \\ w'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{k_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{k_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$P_{proj} = M_{proj} P_{view}$$

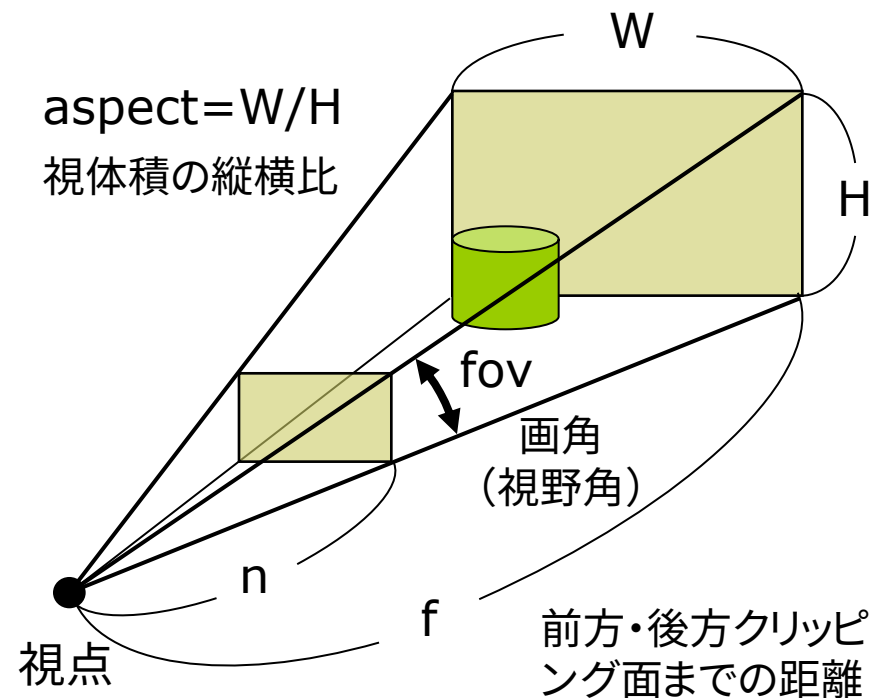
□ ここまでの座標変換の合成

$$P_{proj} = M_{proj} M_{view} M_{model} P_{local} \quad 8$$

9.5 透視投影関数

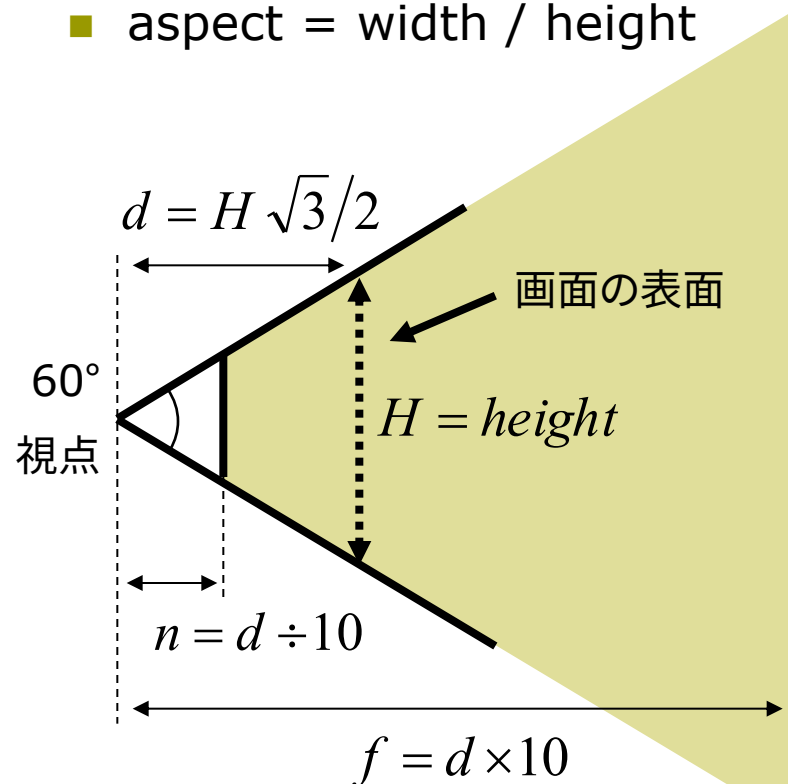
透視投影関数

- perspective(fov, aspect, n, f)
 - ただし、すべての引数はゼロ以外
 - fov(視野角)は縦方向で指定
 - aspectは、floatで計算すること



□ Processingのデフォルト設定

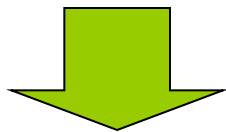
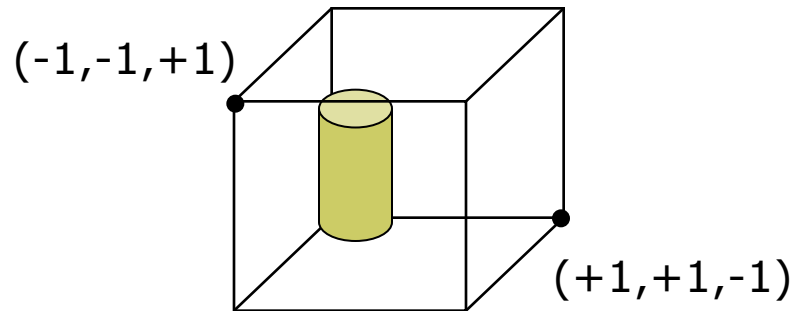
- perspective()を呼ばない場合
- または、引数なしで呼んだ場合
- 画角(視野角) = 60° ($\pi/3$)
- aspect = width / height



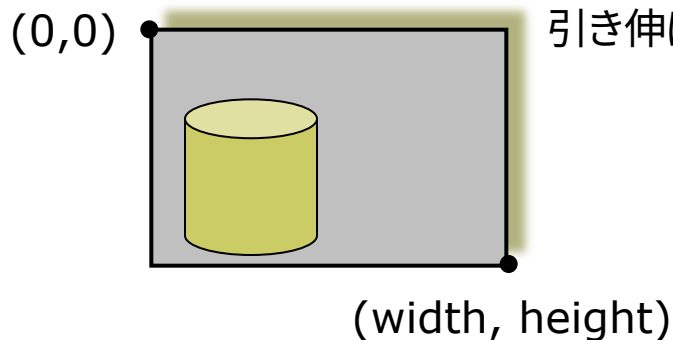
9.6 ビューポート変換とクリッピング

ビューポート変換 (p.50)

□ 正規化視体積



□ デバイス座標系



画面サイズに
引き伸ばす

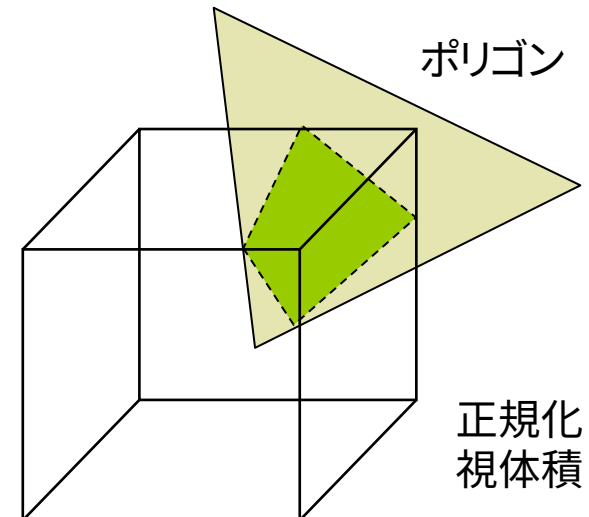
3次元クリッピング (p.53)

□ 線分のクリッピング

- コーエン・サザランド法 (4.6)
- z座標を加えた6ビットコード

□ ポリゴンのクリッピング

- 切り口で形が変わるので、分割処理等が必要になる
- 特に三角形しか扱えない場合



9.7* 隠面消去(1)

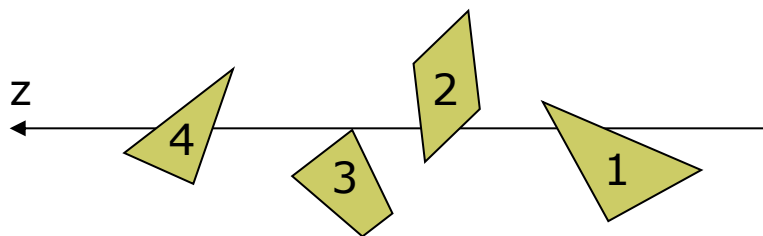
隠面消去(隠線・隠面処理)

□ 隠面消去とは

- 他の物体などに隠れて見えない物体(の全部または一部)を描画しない処理
- 弱点を補い合ういくつかの手法を組み合わせることもある

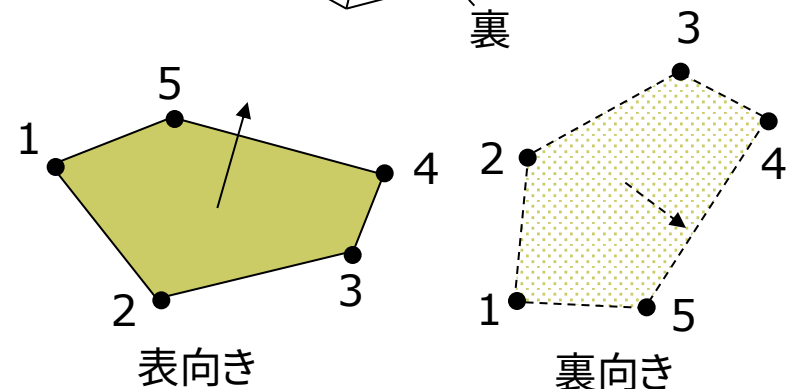
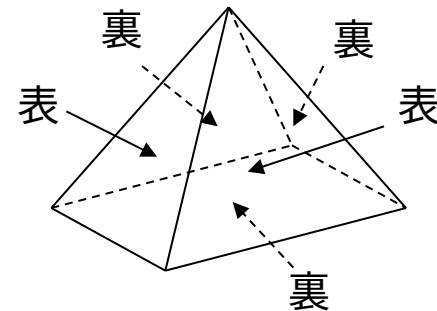
□ 奥行きソート法(p.127)

- ポリゴンをz座標(視点座標)で並び替え、遠くから順に描く
- 細長いポリゴンで問題が生じる



□ バックフェースカリング(p.126)

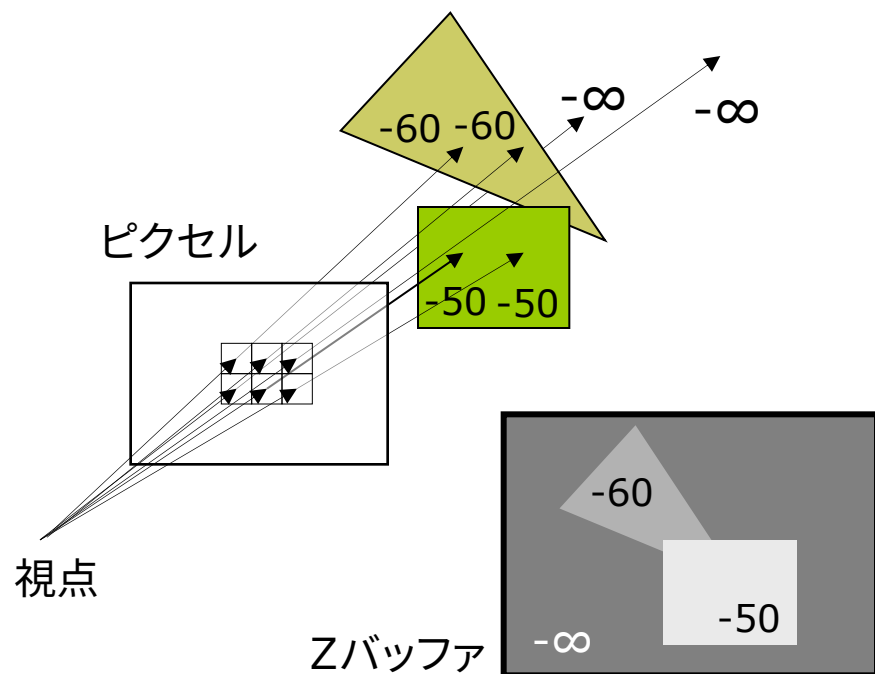
- ポリゴンに表裏を設定し、裏向きのポリゴンを描画しない
- 表裏はポリゴン作成時の頂点の順序(右回りか左回りか)で指定
- 凸多面体1つだけならこれで十分



9.8* 隠面消去(2)

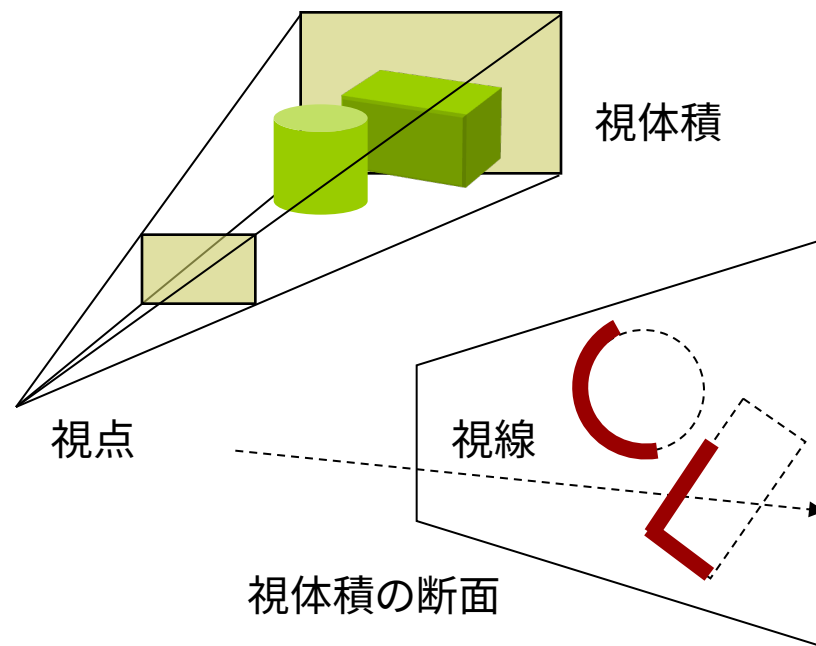
□ Zバッファ法(p.133)

- 画面上の全ピクセルに、z座標を持たせ、1点1点描画するときに遠近関係をチェックする
- 単純&高速でハードウェア向き
- 半透明の重なるの処理に難点



□ スキャンライン法(p.130)

- ピクセル横1行(スキャンライン)ごとに、ポリゴンの切断線の遠近関係を数学的に求める
- 計算は複雑だが、使用メモリが少ないため、最初に実用化



9.9* 演習課題

課題

問1) 9.10のプログラムに適切な処理を補って、実行してみなさい

- 適当なsetup関数を補う

1. 紙飛行機が遠くから手前に近づいてきて、カメラの横を飛び去っていくようにしなさい

- 飛び去ったら、元の位置に戻って繰り返すようにしなさい

- ヒント: translate

2. カメラの向きを紙飛行機をずっと追跡するようにしなさい

- ヒント: camera

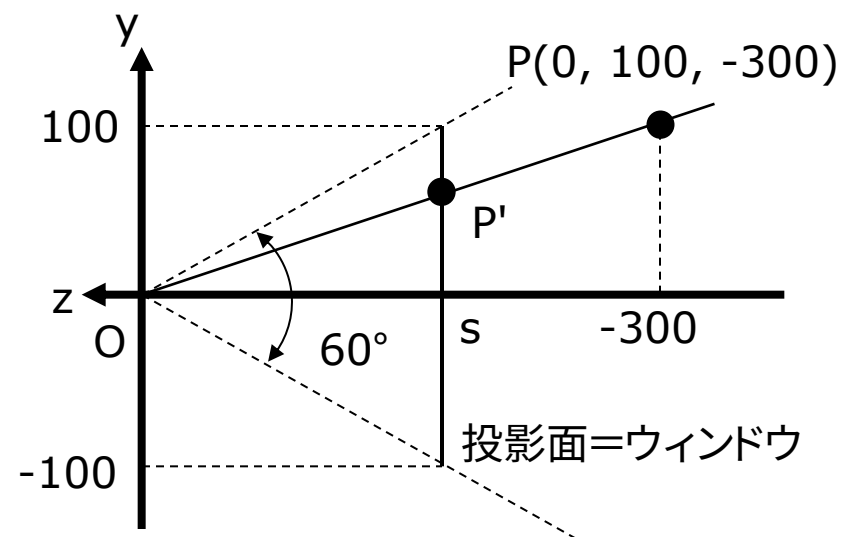
3. マウスのボタンを押している間、望遠表示にするようにしなさい

- ヒント: perspective

問2) 下図は投影変換の原理を示したものである(ウィンドウサイズは 200×200 、画角は 60° とする)

1. P' のz座標 s を求めなさい
2. 視点座標系で $(0, 100, -300)$ に変換された点 P が、投影面上に写像される座標 P' を求めなさい

- A4用紙で次回開始時に提出



9.10 演習課題 (続き)

```
void draw() {
  background(50, 50, 100);

  // 画角の設定
  perspective(PI/3, (float) width /
             height, 10, 10000);

  // カメラの位置と撮影目標の設定
  camera(-150, -500, 1500,
         0, 0, 0, 0, 1, 0);

  // 照明の光を上からに変更
  pushMatrix();
  rotateX(PI/2); lights();
  popMatrix();

  fill(255); noStroke();
  pushMatrix();
  translate(0, -300, 1200);
  paperplane();
  popMatrix();
```

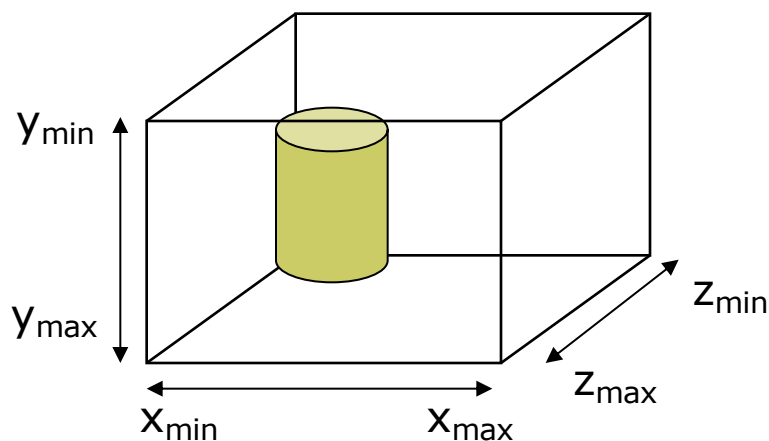
```
  fill(0, 50, 0); noStroke();
  for (int i = -10; i <= 10; i++) {
    for (int j = -10; j <= 10; j++) {
      pushMatrix();
      translate(i*200, 0, j*200);
      box(180, 10, 180);
      popMatrix();
    }
  }
}

// 紙飛行機の表示(他の図形に変えてもよい)
void paperplane() {
  beginShape(TRIANGLE_FAN);
  vertex(0, 0, 0);
  vertex(-30, 5, -50);
  vertex(-5, 0, -50);
  vertex(0, 20, -50);
  vertex(5, 0, -50);
  vertex(30, 5, -50);
  endShape();
}
```

9.11 参考：平行投影 (p.45)

平行投影 (直交投影)

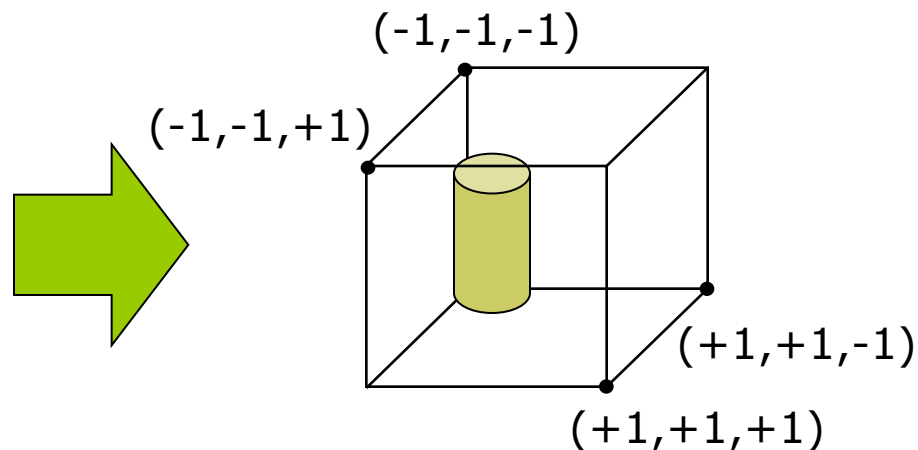
- 視体積 (ビューボリューム)
 - 視体積 = 「見える領域」
 - 平行投影の視体積は直方体



平行投影関数

- $\text{ortho}(x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max})$

- 正規化視体積
 - 各座標を $-1 \sim +1$ に正規化する
 - 直方体 \rightarrow 立方体
 - z 座標は $0 \sim 1$ にする方式もある



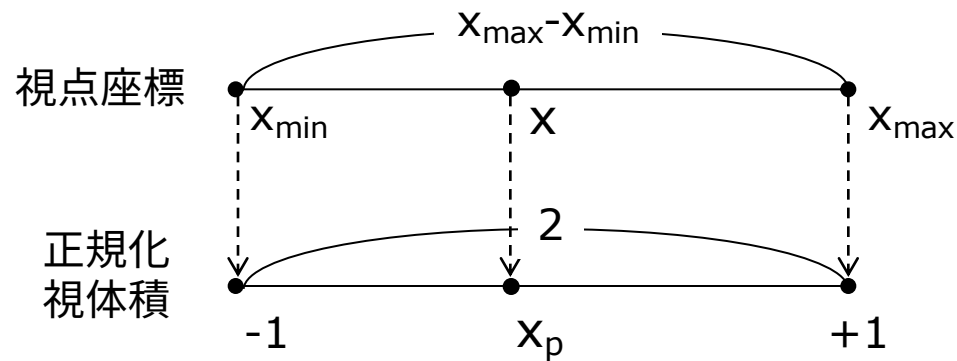
- 計算式

$$x_p = \frac{2x - (x_{\max} + x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}}$$

y, z も同様 (教科書は z は $0 \sim 1$)

9.12 参考：平行投影行列 (p.45参考)

□ 平行投影の計算



$$\begin{aligned}
 x_p &= \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \times 2 - 1 \\
 &= \frac{2x - (x_{\max} + x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}} \\
 &= \frac{2x}{x_{\max} - x_{\min}} - \frac{x_{\max} + x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}
 \end{aligned}$$

y座標、
z座標
も同様

□ 変換行列による表現

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & 0 & -\frac{x_{\max} + x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \\ 0 & \frac{2}{y_{\max} - y_{\min}} & 0 & -\frac{y_{\max} + y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{z_{\max} - z_{\min}} & -\frac{z_{\max} + z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

正規化
視体積
の座標

視点
座標