Graphics with Processing

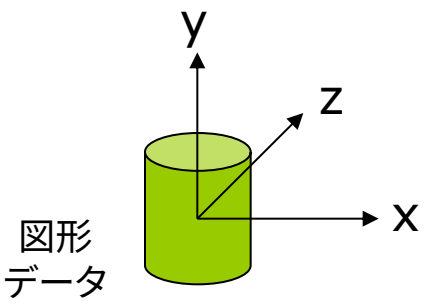
2023-08 モデルビュー変換

https://vilab.org

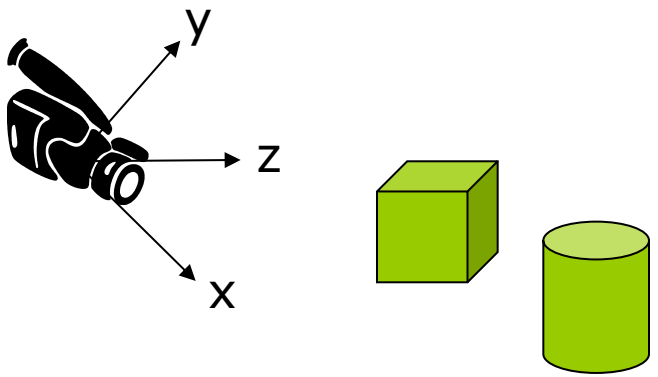
塩澤秀和

8.1* 3DCGの座標系(p.49)

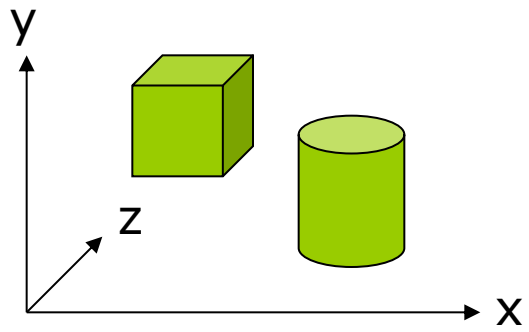
- ローカル(モデリング)座標系
  - オブジェクトの座標系



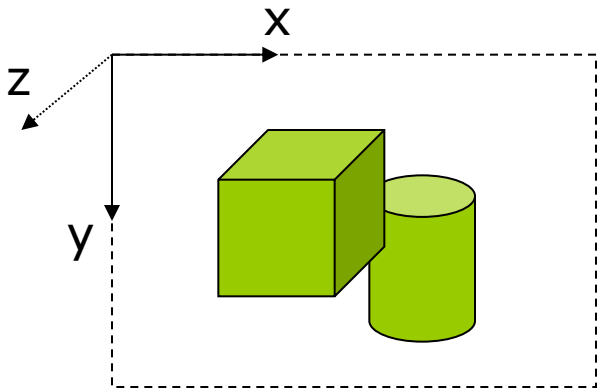
- 視点(カメラ)座標系
  - 遠近感や前後関係を計算



- ワールド座標系
  - 3次元世界の座標系

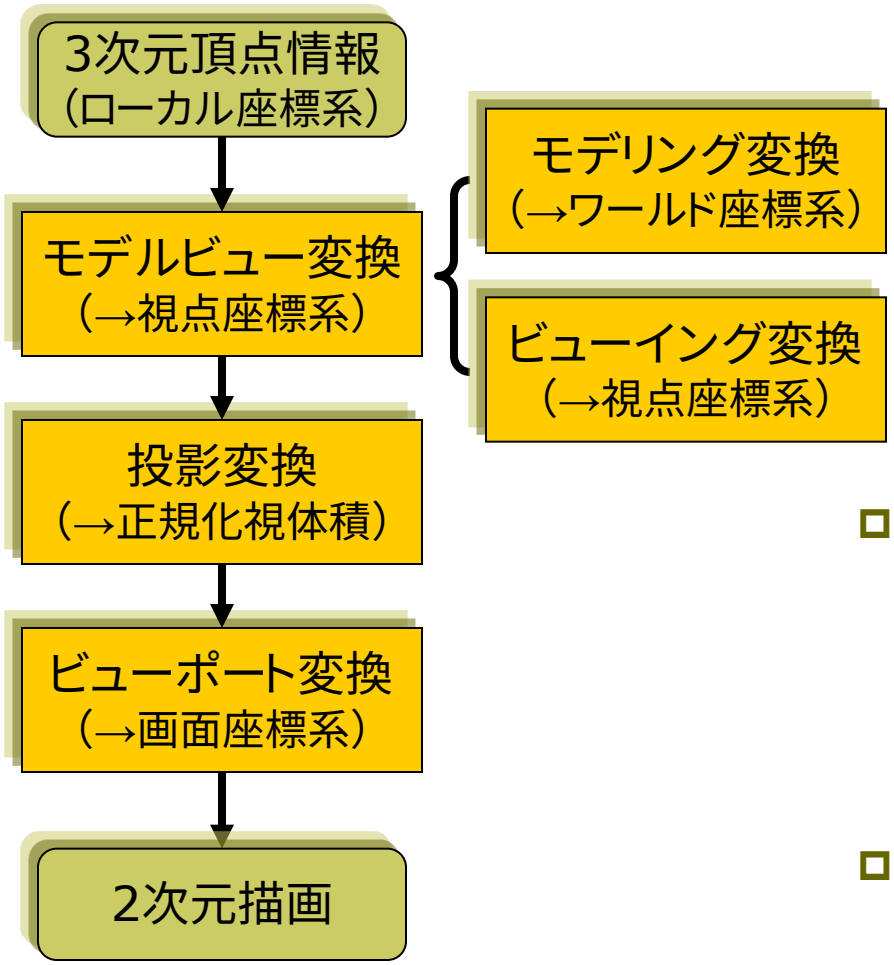


- 画面(デバイス)座標系



8.2* 3DCGの座標変換(p.49)

- ビューイングパイプライン



- モデルビュー変換(第8回)
  - オブジェクト(3Dモデル)と視点(カメラ)の位置関係の設定する
  - モデリング変換:
    各オブジェクトの配置
  - ビューイング変換(視野変換):
    視点(カメラ)の設定
  - translate(), scale(), rotate{X,Y,Z}(), camera()
- 投影変換(第9回)
  - 空間全体を投影面での比率を表す正規化視体積へ変換
  - 平行投影: ortho()
  - 透視投影: perspective()
- ビューポート変換
  - 正規化視体積から画面座標へ

8.3* モデルビュー変換

モデリング変換
- オブジェクトの位置設定
  - 目的：ワールド座標系に個々の3Dモデルを配置する
  - 変換前：ローカル座標系
  - 変換後：ワールド座標系

ビューイング変換（視野変換）
- 視点（カメラ）の位置設定
  - 目的：投影計算のために、座標の原点を視点に移動する
  - 変換前：ワールド座標系
  - 変換後：視点座標系

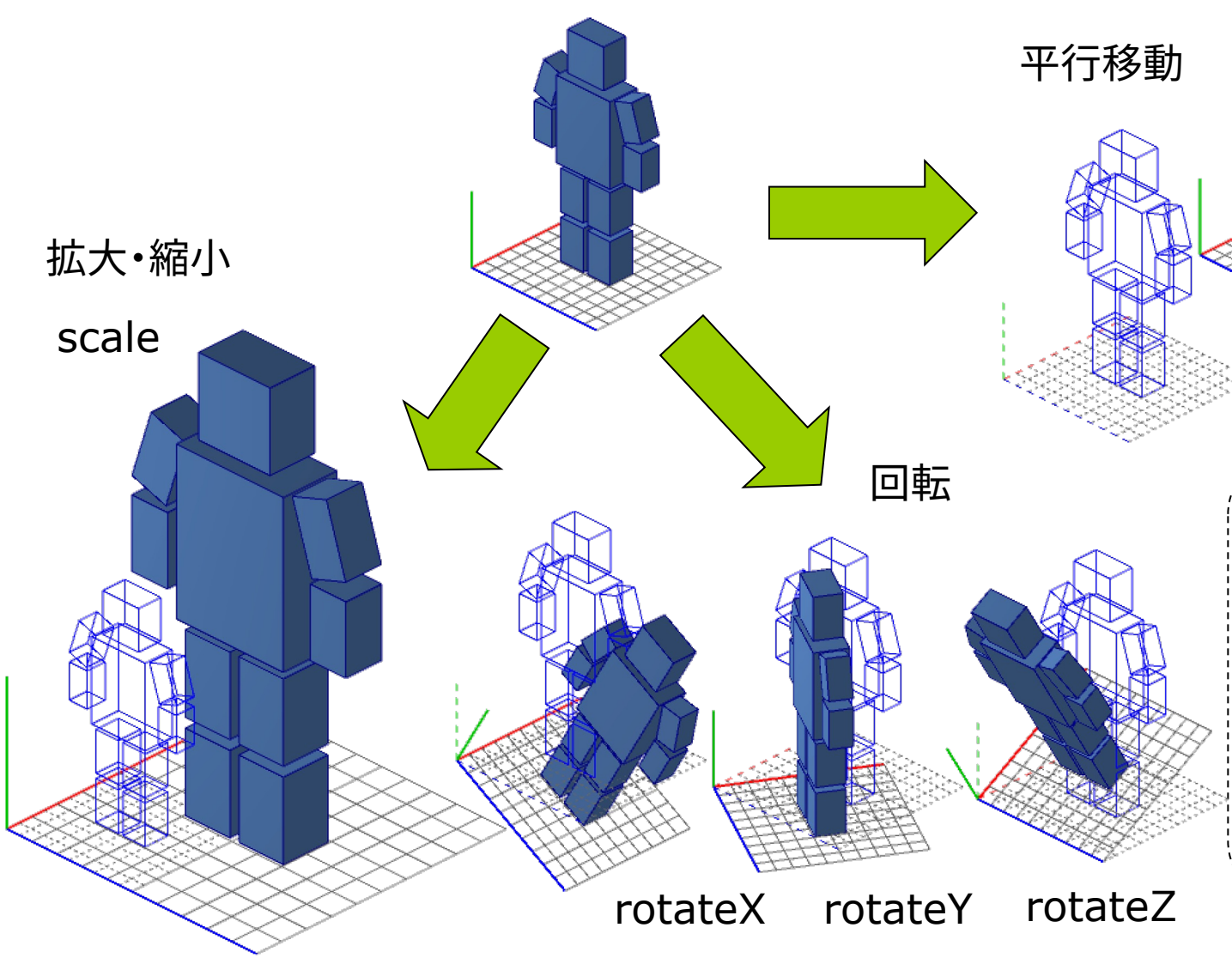
$$P_{world} = M_{model} P_{local}$$

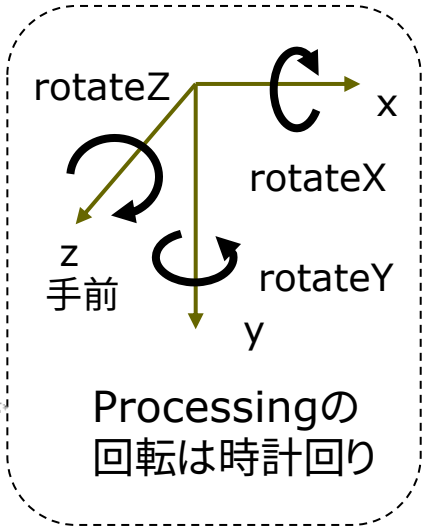
数学的には同じ形式
一連の「モデルビュー変換」

$$P_{view} = M_{view} P_{world}$$

$$P_{view} = (M_{view} M_{model}) P_{local}$$

8.4* 3次元幾何変換(p.34)





8.5* 3次元同次座標(p.34)

3次元同次(斉次)座標表現

$$(x,\ y,\ z,\ w)$$

同次座標

直交座標

$$\left(\frac{x}{w},\ \frac{y}{w},\ \frac{z}{w}\right)$$

通常、$w = 1$で用いる

$$(x,\ y,\ z)$$

3次元アフィン変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

同次座標による表現

直交座標による表現

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

8.6 3次元幾何変換(1)

それぞれ展開して確かめよ

3次元幾何変換

- 平行移動

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$
$$z' = z + t_z$$

- 拡大・縮小

$$x' = s_x\, x$$
$$y' = s_y\, y$$
$$z' = s_z\, z$$

同次座標を用いた表現

- 平行移動 $T(t_x, t_y, t_z)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 拡大・縮小 $S(s_x, s_y, s_z)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

8.7 3次元幾何変換(2)

- z軸まわりの回転

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

- x軸まわりの回転

$$x' = x$$
$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

- y軸まわりの回転

$$x' = z\sin\theta + x\cos\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z\cos\theta - x\sin\theta$$

- z軸まわりの回転 $R_z(\theta)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

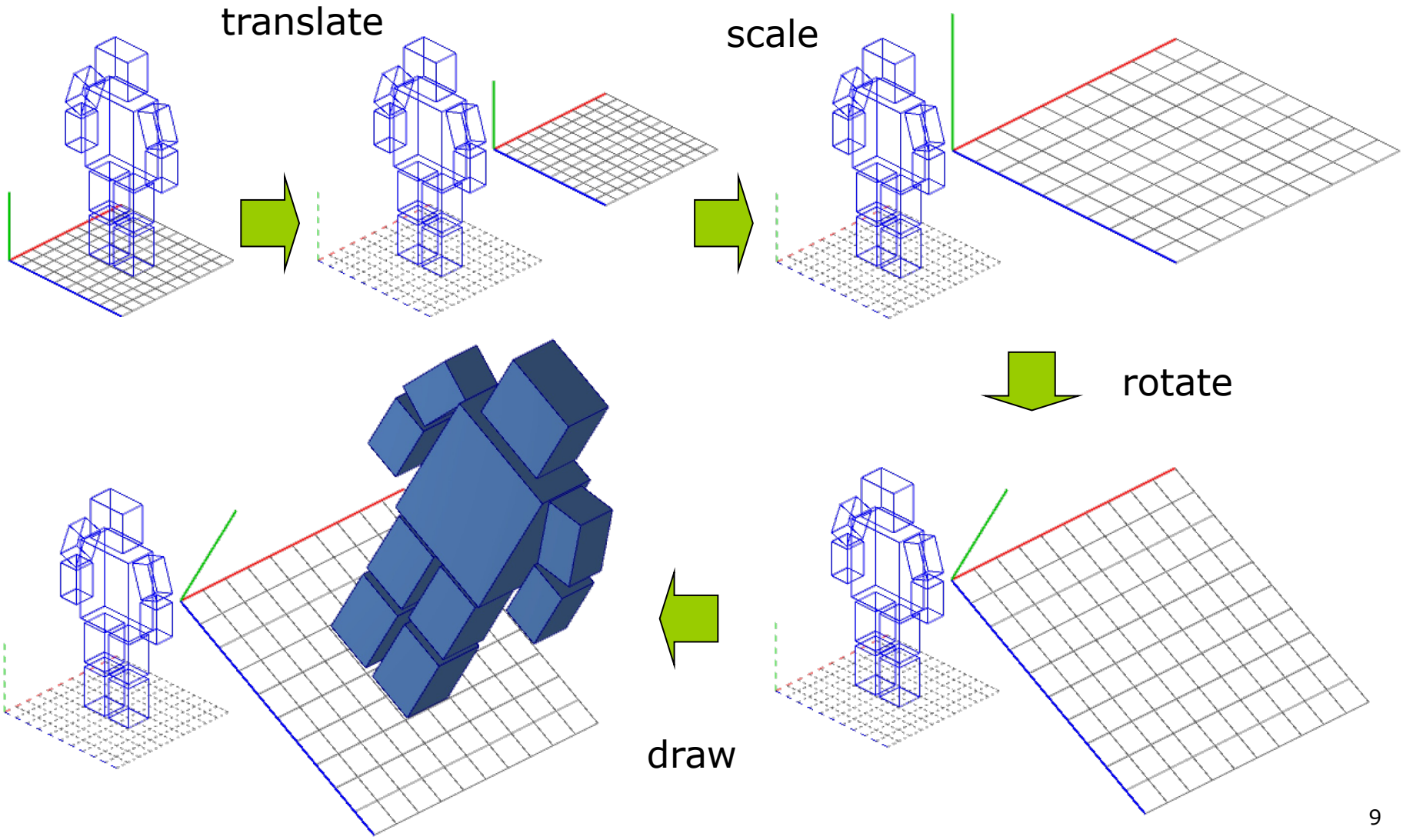
- x軸まわりの回転 $R_x(\theta)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- y軸まわりの回転 $R_y(\theta)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

8.8* 幾何変換の合成(p.37)



8.9* モデリング変換行列

モデリング変換の合成(6.7参考)

- 変換行列の積が合成変換を表す

$$P_{world} = M_1 M_2 M_3 \cdots M_n P_{local}$$

$$M_{model} = M_1 M_2 M_3 \cdots M_n$$

- Processingのコード例

```
translate(0, 100, 300); // M1
scale(2, 2, 2);         // M2
rotateZ(PI/6);          // M3
drawRobot();
```

$$\begin{bmatrix} x_{world} \\ y_{world} \\ z_{world} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{local} \\ y_{local} \\ z_{local} \\ 1 \end{bmatrix}$$

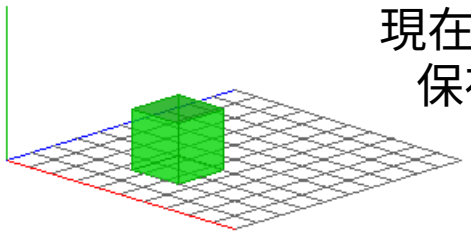
$$\begin{bmatrix} x_{world} \\ y_{world} \\ z_{world} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 2 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{local} \\ y_{local} \\ z_{local} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M_{model} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 2 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

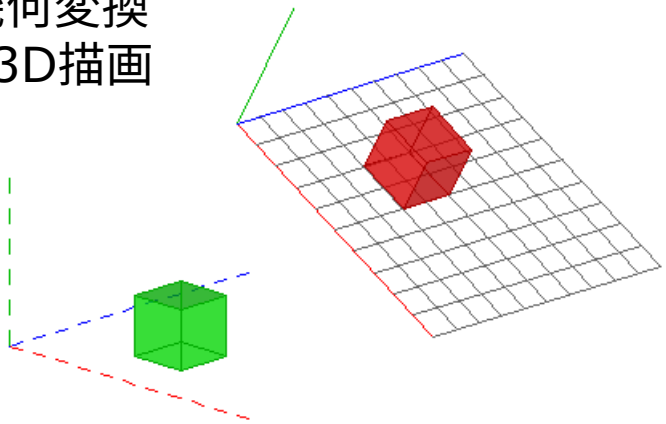
8.10 変換行列の保存と利用(p.54)

複数オブジェクトの配置方法

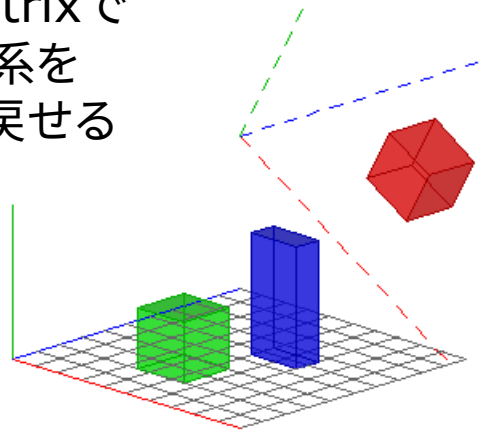
pushMatrixで
現在の座標系を
保存しておく



幾何変換
と3D描画



popMatrixで
座標系を
もとに戻せる



行列スタックの利用

- pushMatrix(), push()
  - システムのモデリング変換行列を一時的に退避する
  - 階層的モデリングに利用される
- popMatrix(), pop()
  - 最近保存した変換行列を戻す
  - popMatrix()と必ず対にする

8.11* ビューイング変換(p.50)

ビューイング変換(視野変換)

- 視点と視線の設定
  - 視点を原点にして“見る”(8.15)

$$\begin{pmatrix} x_{world} \\ y_{world} \\ z_{world} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ビューイング変換}} \begin{pmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{pmatrix}$$

ワールド座標系　　視点座標系

- 幾何変換で実現できる
  - 視線の向きを-z方向に合わせるように座標系を回転し、
  - 視点の位置を原点に合わせるように座標系を平行移動する

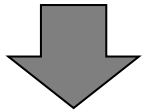
$$P_{view} = M_{view} P_{world}$$

等価なモデリング変換で考えると

- 視点の移動だけの場合

ワールド座標系の中で、視点を原点から $E(e_x, e_y, e_z)$ に移動することは

視点は原点に置いたまま、世界全体を $(-e_x, -e_y, -e_z)$ だけ平行移動



等価なモデリング変換と同じなので

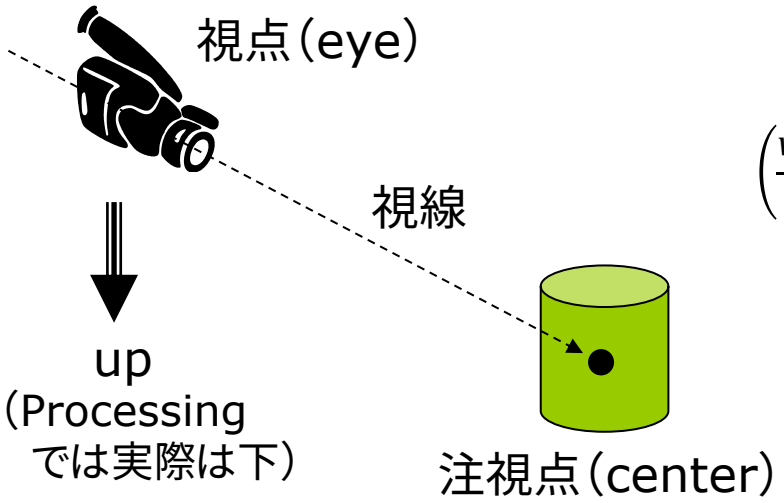
$$M_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

※ 視線は-z方向のままカメラを傾けない場合

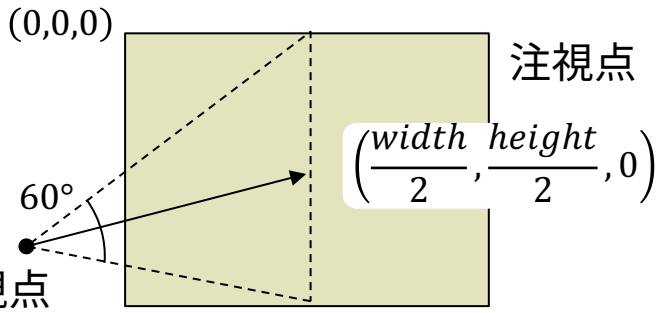
8.12 ビューイング変換関数

視点設定関数

- camera(eyeX, eyeY, eyeZ, centerX, centerY, centerZ, upX, upY, upZ)
  - eye: カメラ(視点)の座標
  - center: カメラで狙う座標
  - up: 上下方向を示すベクトル
  - **モデリング変換より前に書くこと**



- Processingのデフォルト設定
  - camera()
  - camera(width/2, height/2, sqrt(3)*height/2, width/2, height/2, 0, 0, 1, 0)



$$\left(\frac{width}{2}, \frac{height}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} height\right)$$

$$M_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -width/2 \\ 0 & 1 & 0 & -height/2 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3}height/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.13 演習課題

課題

問1) 右のプログラムについて以下の問いに答えなさい

- cameraが表すビューイング変換を行列(M_{view})で示しなさい
- ★の行におけるモデリング変換行列(M_{model})を求めなさい
- モデルビュー変換 $M_{view}M_{model}$ を求め、★のboxの中心の座標を視点座標系で示しなさい
- A4用紙で次回開始時に提出

問2) 3次元空間に立体の文字(列)、マーク等を構成し、それを動かすプログラムを作成しなさい

- 棒1本だけで「I」などはダメ
- カメラのほうを動かしてもよい

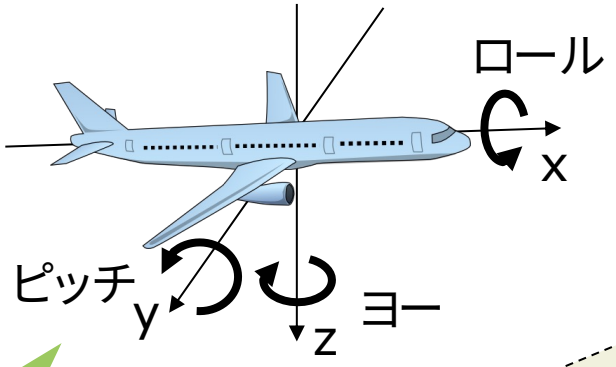
```
void setup() {
  size(500, 400, P3D);
  noLoop();
}

void draw() {
  background(0); lights();
  perspective();
  camera(0, 0, 300, 0, 0, 0, 0, 1, 0);
  printCamera();  // ← これがヒント
  rotateY(PI/6);
  fill(#ff5050); noStroke();
  pushMatrix();
    translate(-10, -30, 0);
    rotateZ(-PI/4);
    box(200, 50, 50);
  popMatrix();
  pushMatrix();
    translate(0, 50, 0);
    box(50, 150, 50);  // ← ★
    printMatrix();  // ← これもヒント
  popMatrix();
}
```

視線の向きは変えず、視点を(0,0,300)に移動するだけ(8.11)

8.14 参考：任意姿勢への回転

3D回転の表現

- オイラー角
  - 任意の姿勢は、2軸以上の3回の回転変換の合成で実現可能
  - X→Y→X, Z→Y→Xなど全部で12パターン（ソフトによって違う）
- 移動体の回転用語



進行方向が基準

rotate(a, x, y, z)
- Processingの“隠し”関数
- 回転軸の方向を(x,y,z)として、角度aだけ回転する

任意軸まわりの回転

- ロドリゲスの回転公式

$\vec{n}$：回転軸の単位ベクトル

θ：回転量

直交座標の場合の回転行列（3×3）

$$R_{3\times3} = I + (\sin\theta)N + (1-\cos\theta)N^2$$

ここで $N = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$

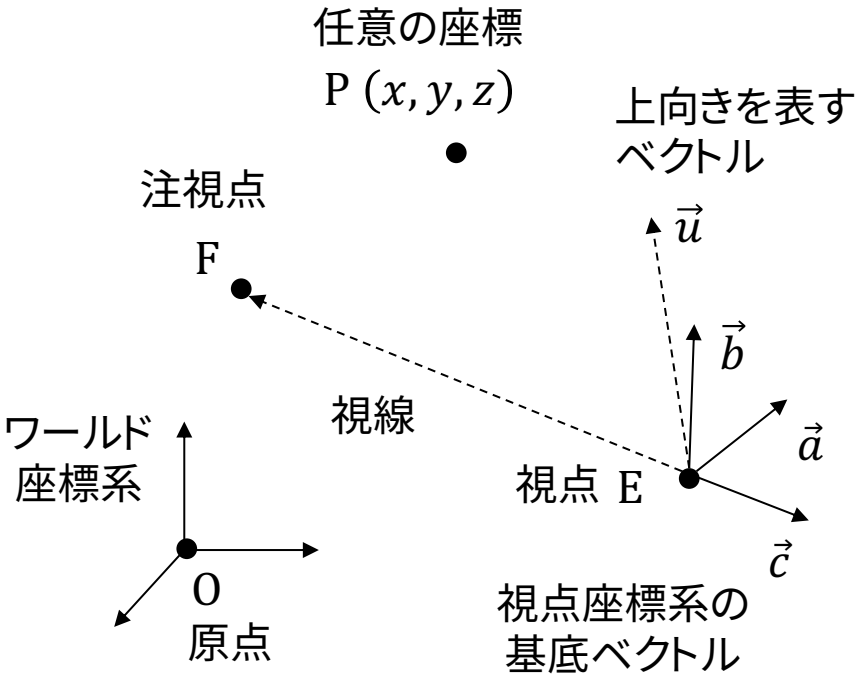
同次座標なら

$$R = \left[\begin{array}{ccc:c} & R_{3\times3} & & \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix}0 & 0 & 0\end{matrix} & & & 1 \end{array}\right]$$

8.15 参考:ビューイング変換の導出

視点と注視点によるカメラワーク

- camera関数の役割
  - 任意の座標 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を視点 $\mathrm{E}(e_x, e_y, e_z)$ から見た値に変換



まず、視点座標系のx, y, z軸を表す
正規直交基底ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を求める

$$\vec{c} = \frac{-\overrightarrow{\mathrm{EF}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right|} \quad \vec{a} = \frac{\vec{u}\times\vec{c}}{|\vec{u}\times\vec{c}|} \quad \vec{b} = \vec{c}\times\vec{a}$$

互いに直交する単位ベクトル

視点座標系の値 $(x_{view}, y_{view}, z_{view})$ は、
視点から $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を“1目盛り”として測った
位置を示すので、以下が成り立つ

$$P = E + x_{view}\,\vec{a} + y_{view}\,\vec{b} + z_{view}\,\vec{c}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix}$$

この行列を R とおく
（何らかの回転を表す）

（次のページへ）

8.16 参考:ビューイング変換の導出

E を移項した後、両辺に左から R の行と列を入れ替えた転置行列 R^T を掛ける

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix}$$

正規直交基底ベクトルを並べた行列は「直交行列」と言われ、その転置行列と逆行列は等しい

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$は互いに直交するので異なるベクトル同士の内積は0

$R^{-1} = R^T$だったことが分かる

同次座標でまとめなおすと、行列部分がM_{view}である

$$\begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 0 \\ c_x & c_y & c_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & -a_x e_x - a_y e_y - a_z e_z \\ b_x & b_y & b_z & -b_x e_x - b_y e_y - b_z e_z \\ c_x & c_y & c_z & -c_x e_x - c_y e_y - c_z e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$