

Graphics with Processing



2022-08 モデルビュー変換

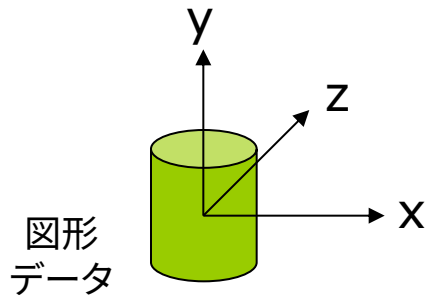
<http://vilab.org>

塩澤秀和

8.1* 3DCGの座標系 (p.49)

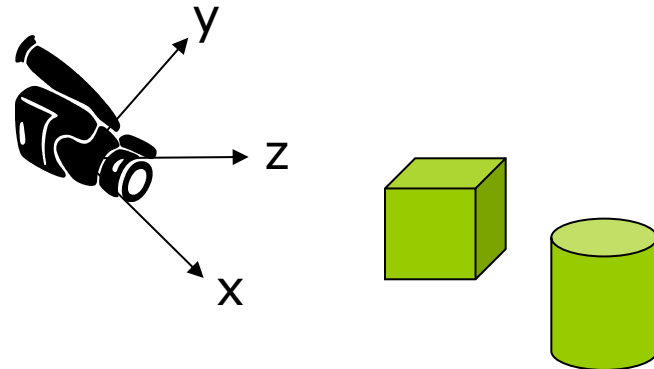
□ ローカル(モデリング)座標系

■ オブジェクトの座標系



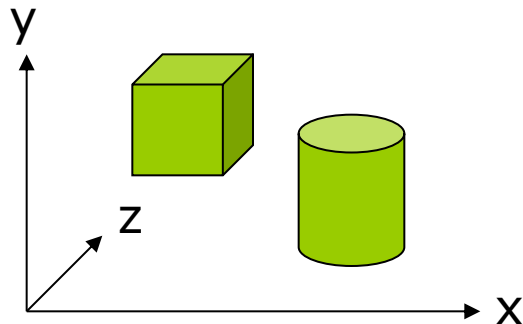
□ 視点(カメラ)座標系

■ 遠近感や前後関係を計算

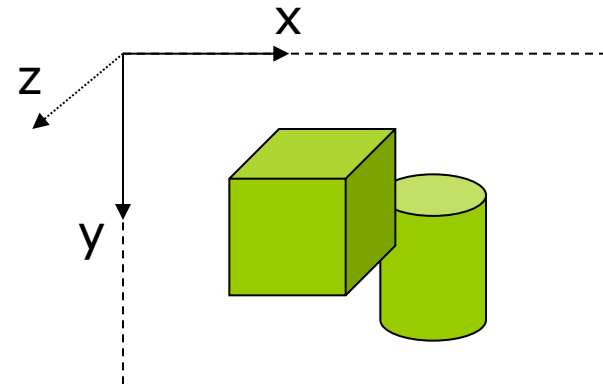


□ ワールド座標系

■ 3次元世界の座標系

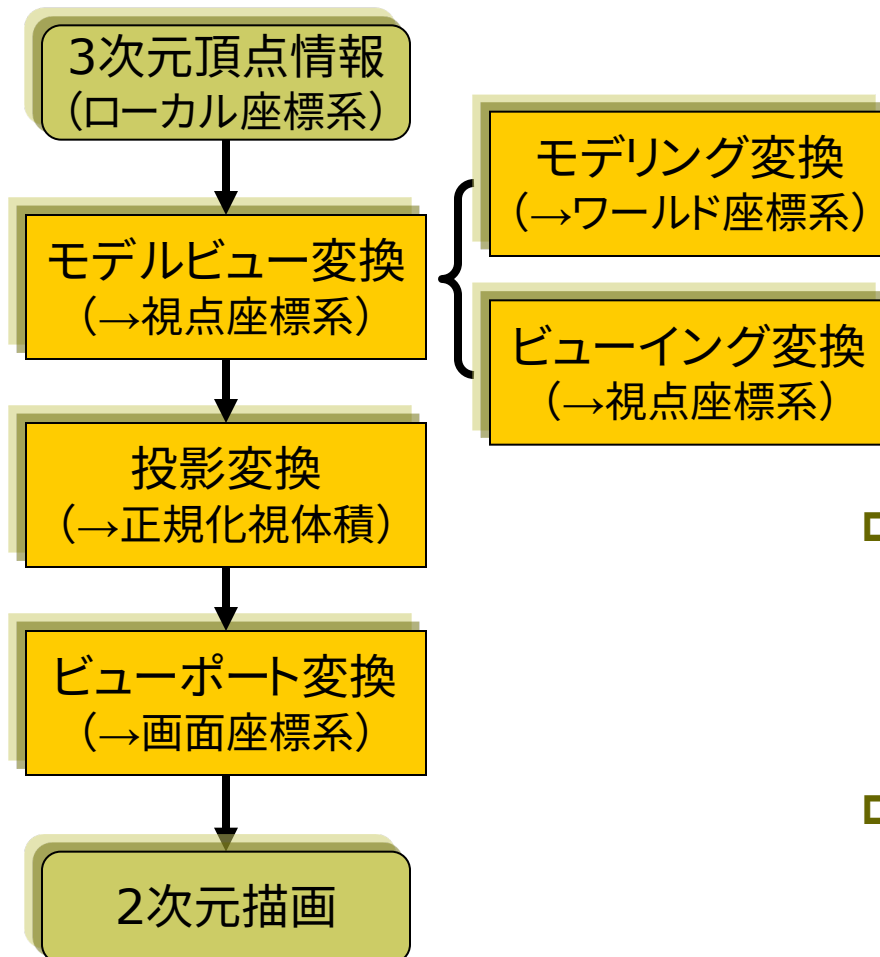


□ 画面(デバイス)座標系



8.2* 3DCGの座標変換(p.49)

□ ビューイングパイプライン



□ モデルビュー変換

- オブジェクト(図形・物体)と視点(カメラ)の位置関係の設定
- モデリング変換:
オブジェクトの配置
- ビューイング変換(視野変換):
視点の位置設定
- `translate()`, `scale()`,
`rotate{X,Y,Z}()`, `camera()`

□ 投影変換(次回)

- 投影面へ(正規化視体積へ)
- 平行投影: `ortho()`
- 透視投影: `perspective()`

□ ビューポート変換

- 正規化視体積から画面座標へ(自動)

8.3* モデルビュー変換

モデリング変換

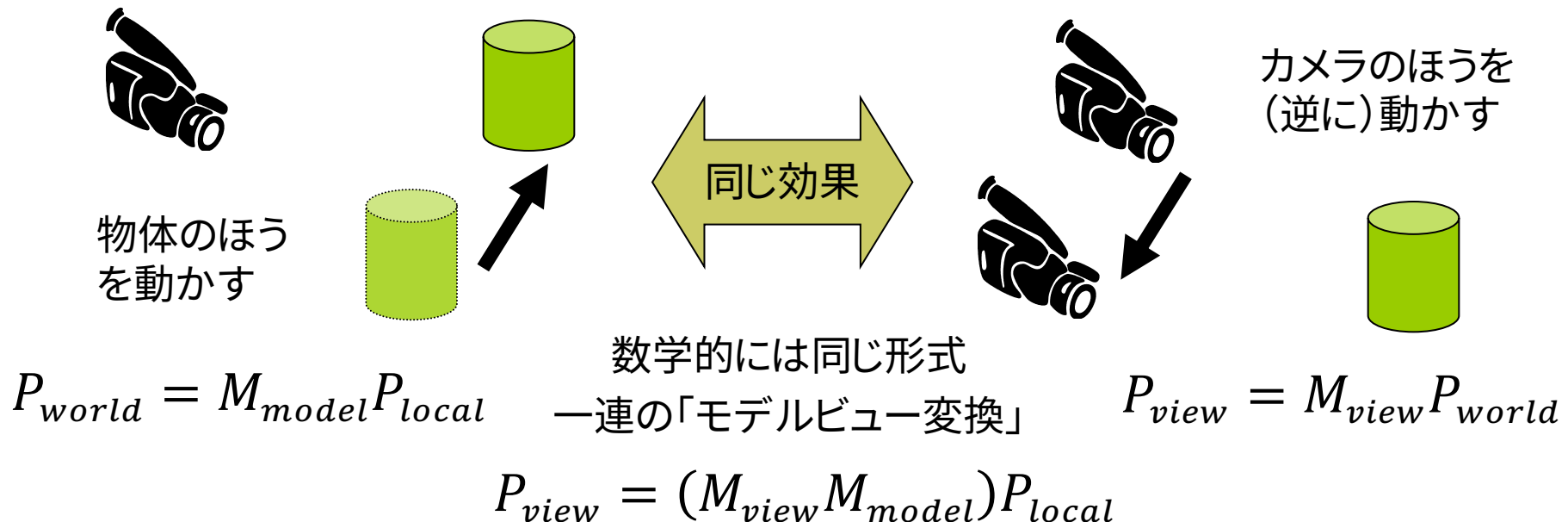
□ オブジェクトの位置設定

- 目的: ワールド座標系に個々の3Dモデルを配置する
- 変換前: ローカル座標系
- 変換後: ワールド座標系

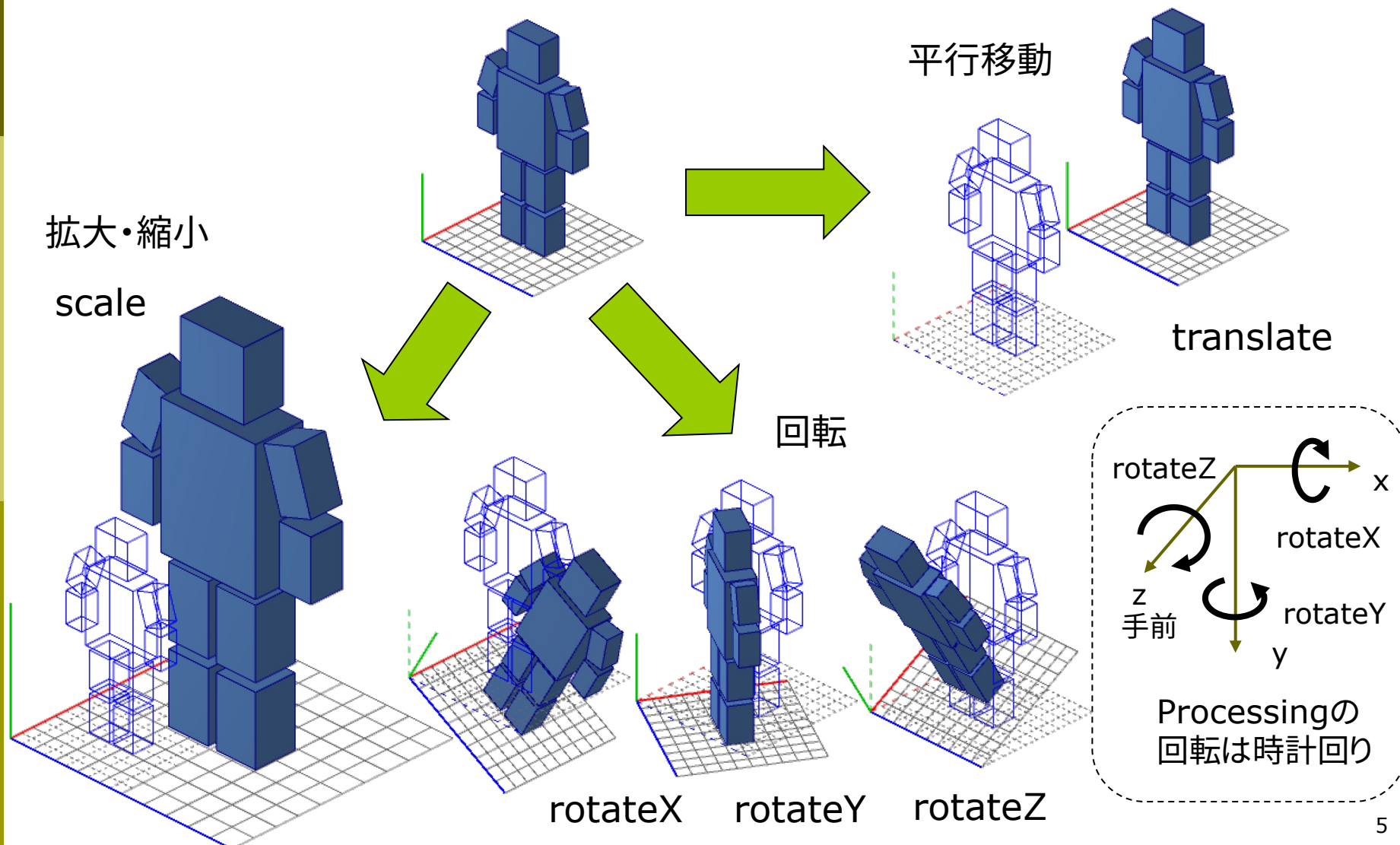
ビューイング変換(視野変換)

□ 視点(カメラ)の位置設定

- 目的: 投影計算のために, 座標の原点を視点に移動する
- 変換前: ワールド座標系
- 変換後: 視点座標系



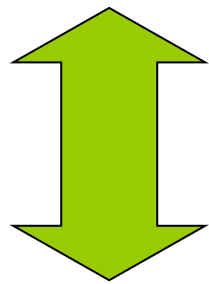
8.4* 3次元幾何変換(p.34)



8.5* 3次元同次座標(p.34)

3次元同次(斉次)座標表現

$$(x, y, z, w)$$



同次座標

直交座標

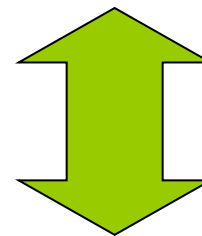
$$\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w} \right)$$

通常, $w = 1$ で用いる

$$(x, y, z)$$

3次元アフィン変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



同次座標による表現

直交座標による表現

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

8.6 3次元幾何変換(1)

それぞれ展開
して確かめよ

3次元幾何変換

□ 平行移動

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

$$z' = z + t_z$$

□ 拡大・縮小

$$x' = s_x x$$

$$y' = s_y y$$

$$z' = s_z z$$

同次座標を用いた表現

□ 平行移動 $T(t_x, t_y, t_z)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

□ 拡大・縮小 $S(s_x, s_y, s_z)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

8.7 3次元幾何変換(2)

□ z軸まわりの回転

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

□ x軸まわりの回転

$$x' = x$$

$$y' = y \cos \theta - z \sin \theta$$

$$z' = y \sin \theta + z \cos \theta$$

□ y軸まわりの回転

$$x' = z \sin \theta + x \cos \theta$$

$$y' = y$$

$$z' = z \cos \theta - x \sin \theta$$

□ z軸まわりの回転 $R_z(\theta)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

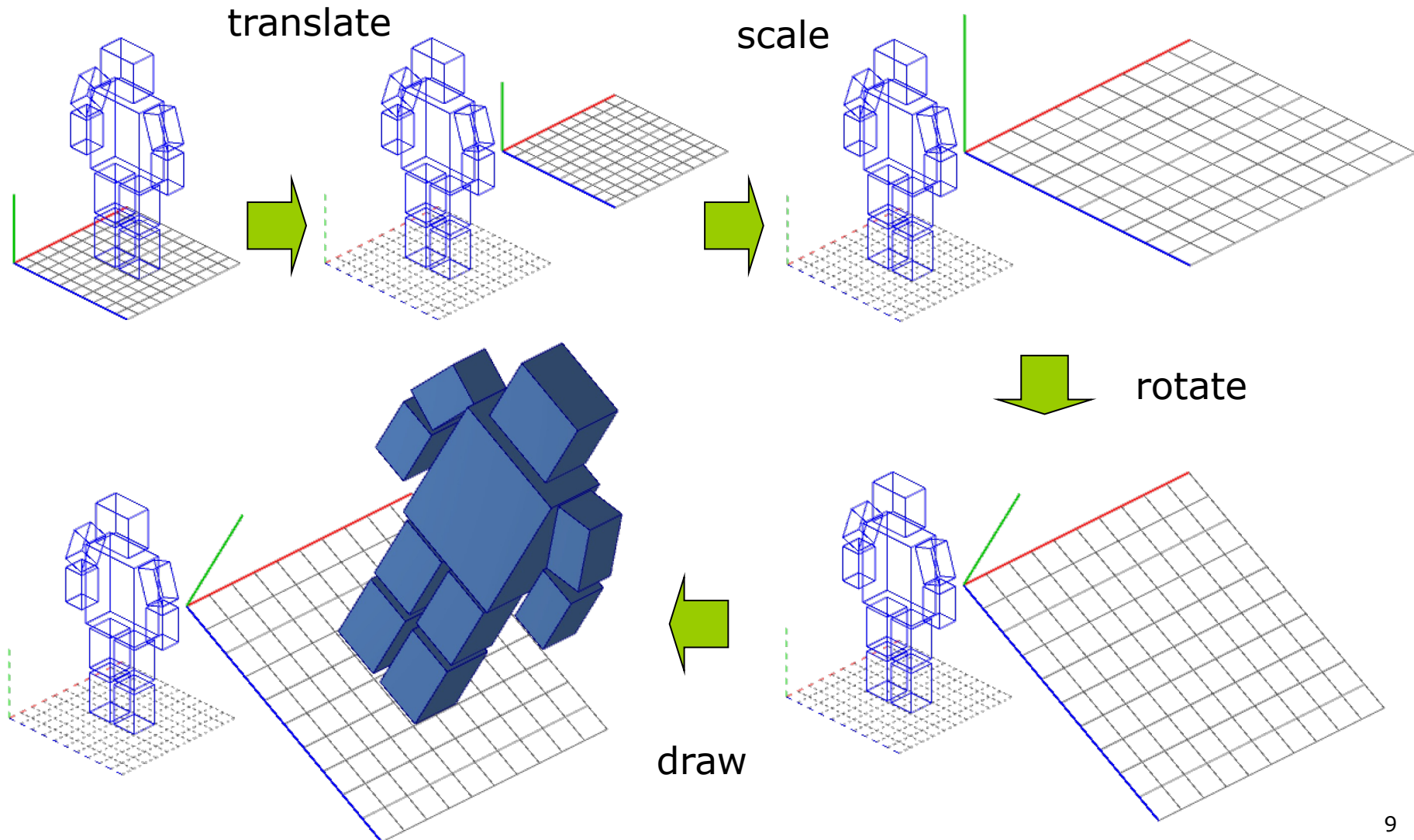
□ x軸まわりの回転 $R_x(\theta)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

□ y軸まわりの回転 $R_y(\theta)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

8.8* 幾何変換の合成(p.37)



8.9* モデリング変換行列

ワールド座標系への変換

□ モデリングの合成変換行列

$$P_{world} = M_1 M_2 M_3 \cdots M_n P_{local}$$

$$M_{model} = M_1 M_2 M_3 \cdots M_n$$

□ Processingのコード例

```
translate(0, 100, 300); // M1
scale(2, 2, 2); // M2
rotateZ(PI/6); // M3
drawRobot();
```

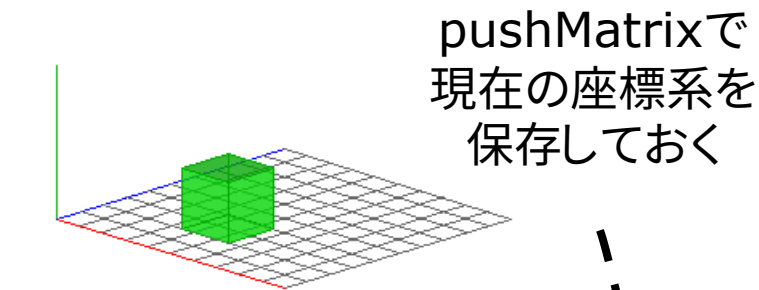
$$\begin{bmatrix} x_{world} \\ y_{world} \\ z_{world} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{local} \\ y_{local} \\ z_{local} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{world} \\ y_{world} \\ z_{world} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 2 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{local} \\ y_{local} \\ z_{local} \\ 1 \end{bmatrix}$$

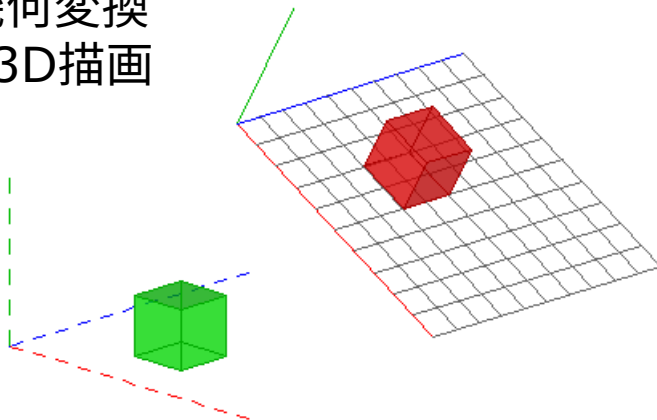
$$\therefore M_{model} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 2 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.10 変換行列の保存と利用 (p.54)

複数オブジェクトの配置



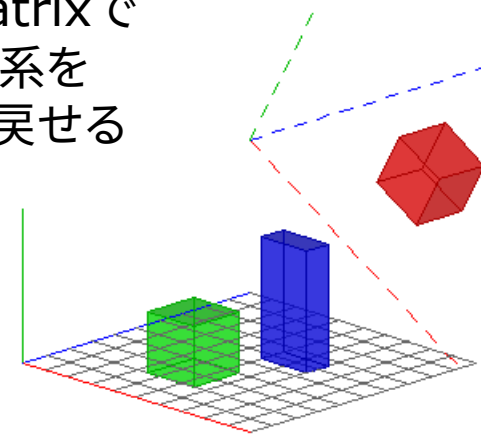
幾何変換
と3D描画



行列スタックの利用

- pushMatrix()
 - システム変換行列(モデリング変換行列)を一時的に退避する
 - 階層的モデリングに利用される
- popMatrix()
 - 最近保存した変換行列を戻す
 - popMatrix()と必ず対にする

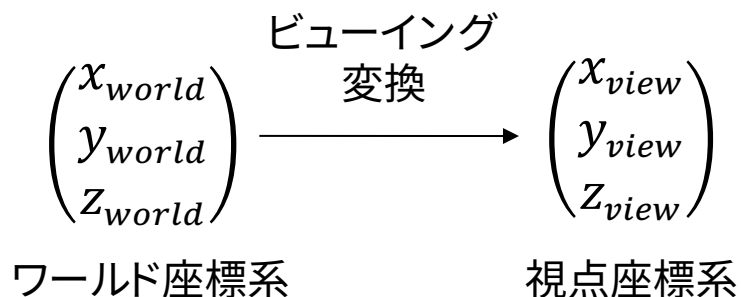
popMatrixで
座標系を
もとに戻せる



8.11* ビューイング変換 (p.50)

ビューイング変換 (視野変換)

- 視点と視線の設定
 - 視点を原点にして“見る”(8.15)



- 幾何変換で実現できる
 - 視線の向きを-z方向に合わせるように座標系を回転し,
 - 視点の位置を原点に合わせるように座標系を平行移動する

$$P_{view} = M_{view} P_{world}$$

等価なモデリング変換

- 視点の移動だけの場合

ワールド座標系の中で、視点を原点から移動して $E(e_x, e_y, e_z)$ に設置



視点は原点に置いたまま、世界全体を $(-e_x, -e_y, -e_z)$ だけ平行移動



等価なモデリング変換による行列

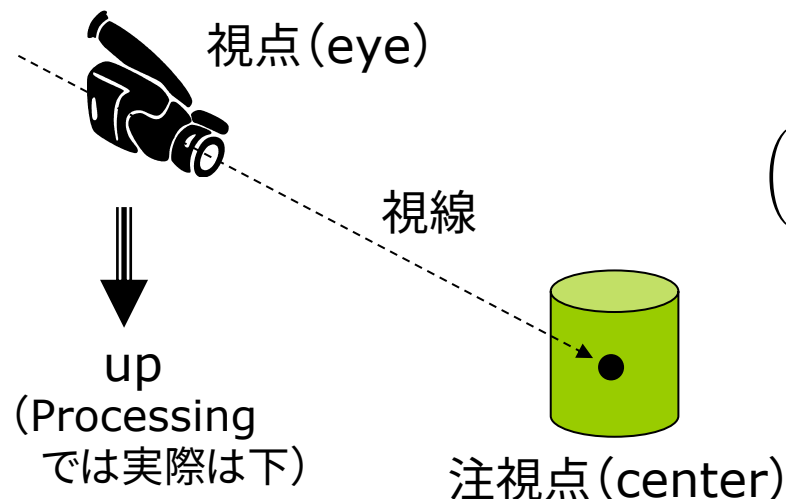
$$M_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

※ 視線は-z方向のままカメラを傾けない場合

8.12 ビューイング変換関数

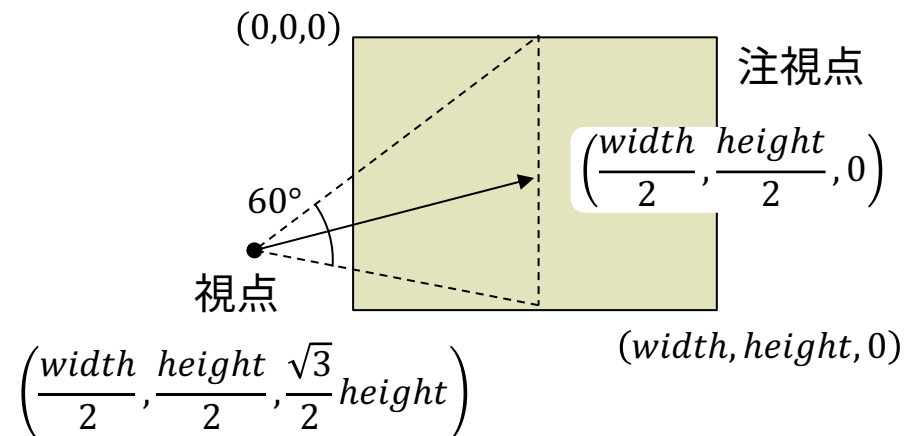
視点設定関数

- camera(eyeX, eyeY, eyeZ, centerX, centerY, centerZ, upX, upY, upZ)
 - eye: カメラ(視点)の座標
 - center: カメラで狙う座標
 - up: 上下方向を示すベクトル
 - **モデリング変換より前に書くこと**



□ Processingのデフォルト

- camera()
- camera(width/2, height/2, sqrt(3)*height/2, width/2, height/2, 0, 0, 1, 0)



$$M_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -width/2 \\ 0 & 1 & 0 & -height/2 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3}height/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.13 演習課題

課題

問1) 右のプログラムを実行してから以下の問いに答えなさい

- camera関数が表すビューイング変換を行列(M_{view})で示しなさい
- さらに,★の箇所でのモデリング変換(M_{model})を求めなさい
- モデルビュー変換 $M_{view}M_{model}$ を求めてから,★のboxの位置を視点座標系に変換しなさい
- A4用紙で次回開始時に提出

問2) 3次元空間に立体の文字列, マーク等を構成し,それを動かすプログラムを作成しなさい

- 棒1本の「I」だけなどはダメ
- カメラのほうを動かしてもよい

```
// 直方体で簡単な「イ」を組み立てる例
void setup() {
  size(500, 400, P3D); noLoop();
}
```

(0,0,300)→(0,0,0)
なので視線は-z方向

```
void draw() {
  background(0); lights();
  perspective();
  camera(0, 0, 300, 0, 0, 0, 0, 1, 0);
  printCamera(); // ← これがヒント
  rotateY(PI/6);
  fill(#ff5050); noStroke();
  pushMatrix();
    translate(-10, -30, 0);
    rotateZ(-PI/4);
    box(200, 50, 50);
  popMatrix();
  pushMatrix();
    translate(0, 50, 0);
    box(50, 150, 50); // ← ★
    printMatrix(); // ← これもヒント
  popMatrix();
}
```

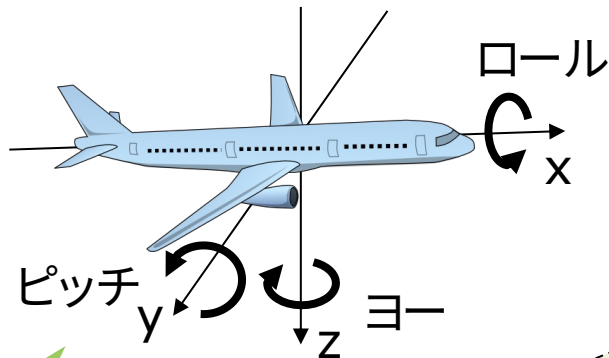
8.14 参考:任意姿勢への回転

3D回転の表現

□ オイラー角

- 任意の姿勢は,2軸以上の3回の回転変換の合成で実現可能
- $X \rightarrow Y \rightarrow X, Z \rightarrow Y \rightarrow X$ など全部で12パターン(ソフトによって違う)

□ 移動体の姿勢回転



進行方向
が基準

`rotate(a, x, y, z)`

- Processingの“隠し”関数
- 回転軸の方向を(x,y,z)として,角度aだけ回転する

任意軸まわりの回転

□ ロドリゲスの回転公式

\vec{n} : 回転軸の単位ベクトル

θ : 回転量

直交座標の場合の回転行列(3×3)

$$R_{3 \times 3} = I + (\sin \theta)N + (1 - \cos \theta)N^2$$

$$\text{ここで } N = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$$

同次座標なら

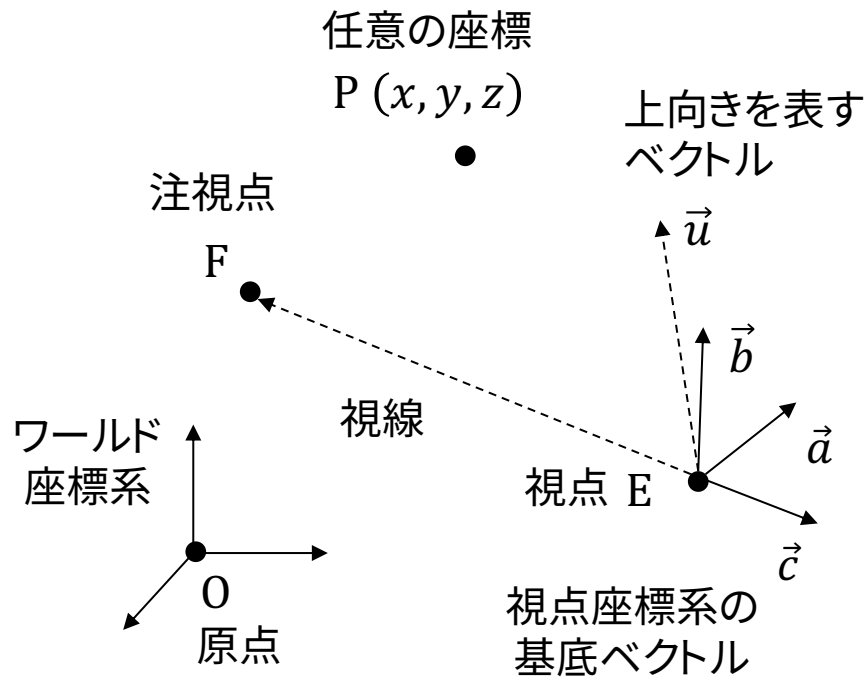
$$R = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & R_{3 \times 3} & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

8.15 参考:ビューイング変換の導出

視点と注視点によるカメラワーク

□ camera関数の役割

- 任意の座標 $P(x, y, z)$ を視点 $E(e_x, e_y, e_z)$ から見た値に変換



まず, 視点座標系の x, y, z 軸を表す
正規直交基底ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を求める

$$\vec{c} = \frac{-\vec{EF}}{|\vec{EF}|} \quad \vec{a} = \frac{\vec{u} \times \vec{c}}{|\vec{u} \times \vec{c}|} \quad \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$$

互いに直交する単位ベクトル

視点座標系の値 $(x_{view}, y_{view}, z_{view})$ は,
視点から $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を“1目盛り”として測った
位置を示すので, 以下が成り立つ

$$P = E + x_{view} \vec{a} + y_{view} \vec{b} + z_{view} \vec{c}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix}$$

この行列を R とおく
(何らかの回転を表す)

(次のページへ)

8.16 参考:ビューイング変換の導出

E を移項した後, 両辺に左から R の行と列を入れ替えた転置行列 R^T を掛ける

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix}$$

正規直交基底ベクトルを並べた
行列は「直交行列」と言われ、
実は転置行列と逆行列が等しい

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は互いに直交するので
異なるベクトル同士の内積は0

$$= \begin{bmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \end{bmatrix}$$

$R^{-1} = R^T$ だったことが分かる

同次座標でまとめなおすと, 行列部分が M_{view} である

$$\begin{bmatrix} x_{view} \\ y_{view} \\ z_{view} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & 0 \\ b_x & b_y & b_z & 0 \\ c_x & c_y & c_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & -a_x e_x - a_y e_y - a_z e_z \\ b_x & b_y & b_z & -b_x e_x - b_y e_y - b_z e_z \\ c_x & c_y & c_z & -c_x e_x - c_y e_y - c_z e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$