

Graphics with Processing



2017-06 座標変換と同次座標

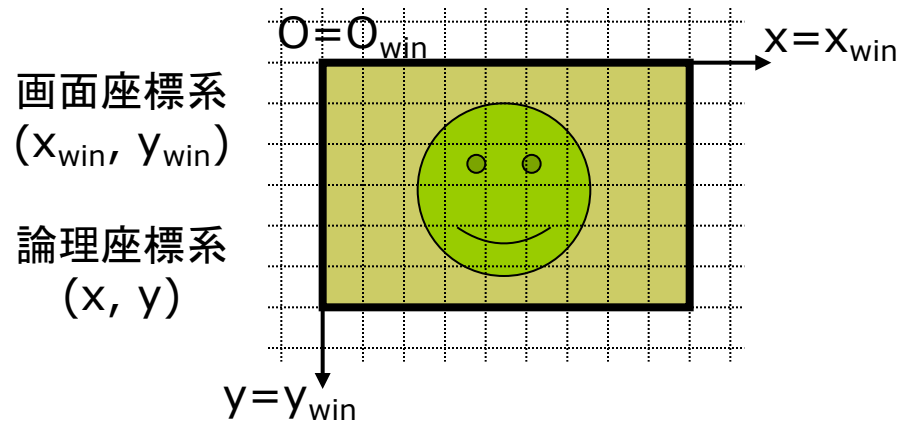
<http://vilab.org>

塩澤秀和

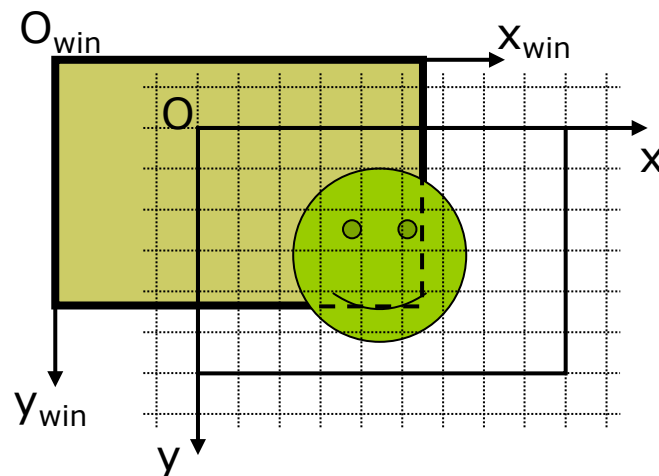
6.1* 座標系

座標系の変換

- 座標系 = 目盛りのつけかた
 - 原点の位置
 - x軸とy軸の方向
 - x軸とy軸の目盛りの刻み
- 論理座標系
 - 描画命令で使う目盛り(座標系)をつけかえることができる
 - 論理座標系
 - ⇒ 描画命令で使うxy座標
 - 画面座標系
 - ⇒ ウィンドウでのピクセル位置
- 座標系の変換
 - 論理座標で描画命令を実行
 - 画面座標でピクセルを設定
 - 対応位置を数学的に計算する



初期状態(画面座標系 = 論理座標系)



描画用の原点をずらした例

6.2* 座標変換 (p.22)

座標変換と幾何変換

□ 座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

□ 座標変換の合成

- いくつかの座標変換の「合成」で
論理座標 → 画面座標を計算

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} x_{win} \\ y_{win} \end{pmatrix}$$

□ 幾何変換 (幾何学的変換)

- 平行移動
- 拡大・縮小
- 回転

幾何変換関数

□ translate(x_0, y_0)

- 座標系を平行移動 (原点を移動)
- x軸方向に x_0 移動
- y軸方向に y_0 移動
- Processingではy軸は下向き

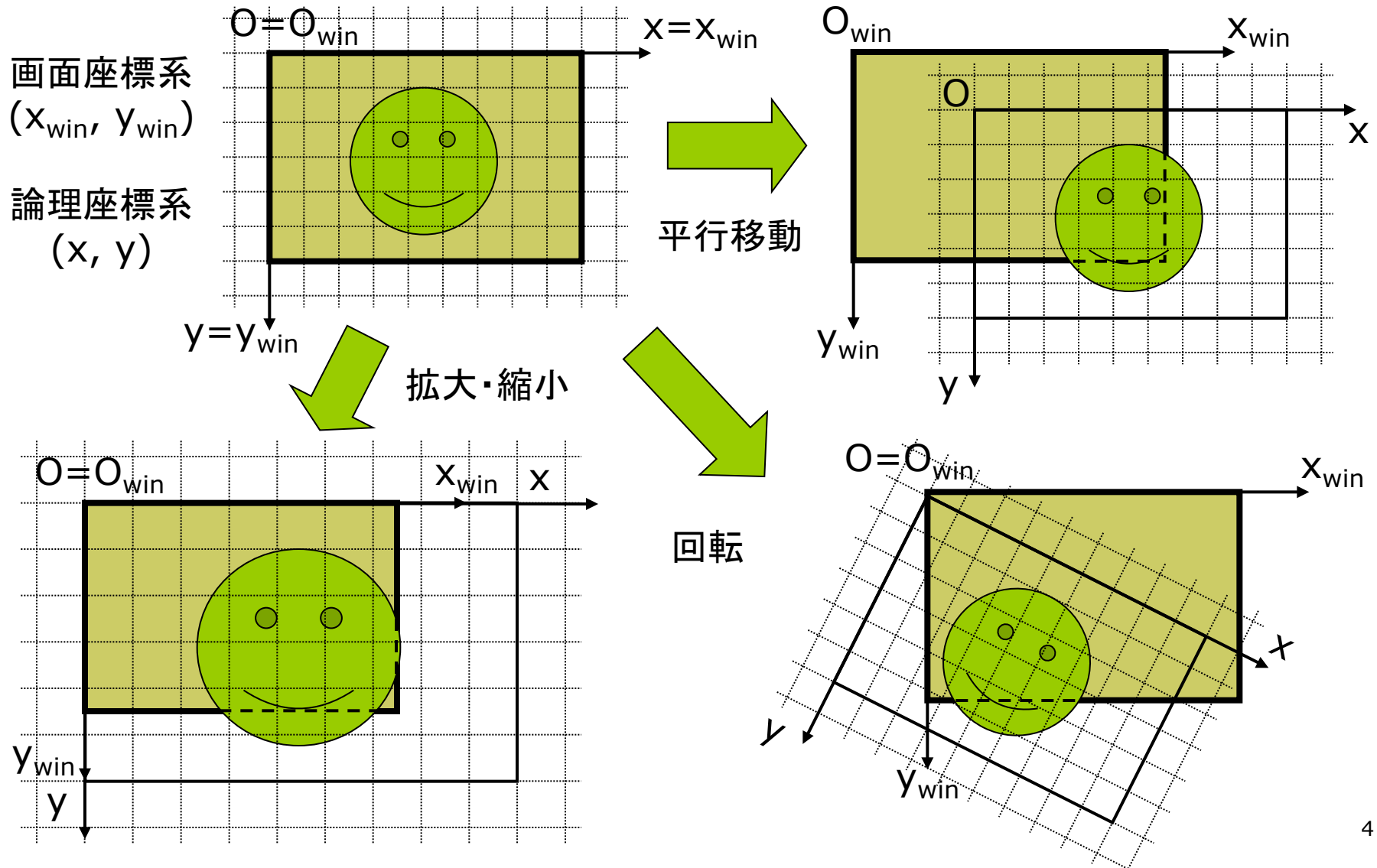
□ scale(α, β)

- 座標系を拡大または縮小
- x軸方向 (左右) に α 倍
- y軸方向 (上下) に β 倍
- 原点が中心に全体が拡大

□ rotate(θ)

- 座標系を回転
- 原点中心に θ ラジアン回転
- Processingで+方向は時計回り

6.3* 幾何変換の効果



6.4* 幾何変換の数学表現

数式による表現

□ 平行移動

$$x' = x + x_0$$

$$y' = y + y_0$$

例) 原点を画面の
(10, 20) に移動し、
座標 (5, 7) に点
を打つと、画面では
(15, 27) に表示

□ 拡大・縮小

$$x' = \alpha x$$

$$y' = \beta y$$

例) 目盛りを横2倍、
縦3倍に拡大して、
座標 (5, 3) に点
を打つと、画面では
(10, 9) に表示

□ 回転

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

導出方法は6.14参照

ベクトルと行列による表現

□ 1次変換

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

なぜ平行移動は表現できないか？

- 拡大・縮小と回転が表現可能
⇒ 各自、対応する行列を求めよ

□ アフィン変換

- すべての幾何変換を表現可能

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

定数項を付加

6.5* 同次座標表現 (p.19)

同次座標表現

- 座標計算をしやすい形式

2次元直交座標 2次元同次座標

$$(x, y) \Leftrightarrow (x, y, 1)$$

同じ座標

- 同次座標表現による変換行列

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

行列1つの掛け算で幾何変換を表せる

同次座標表現による幾何変換

- 平行移動

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

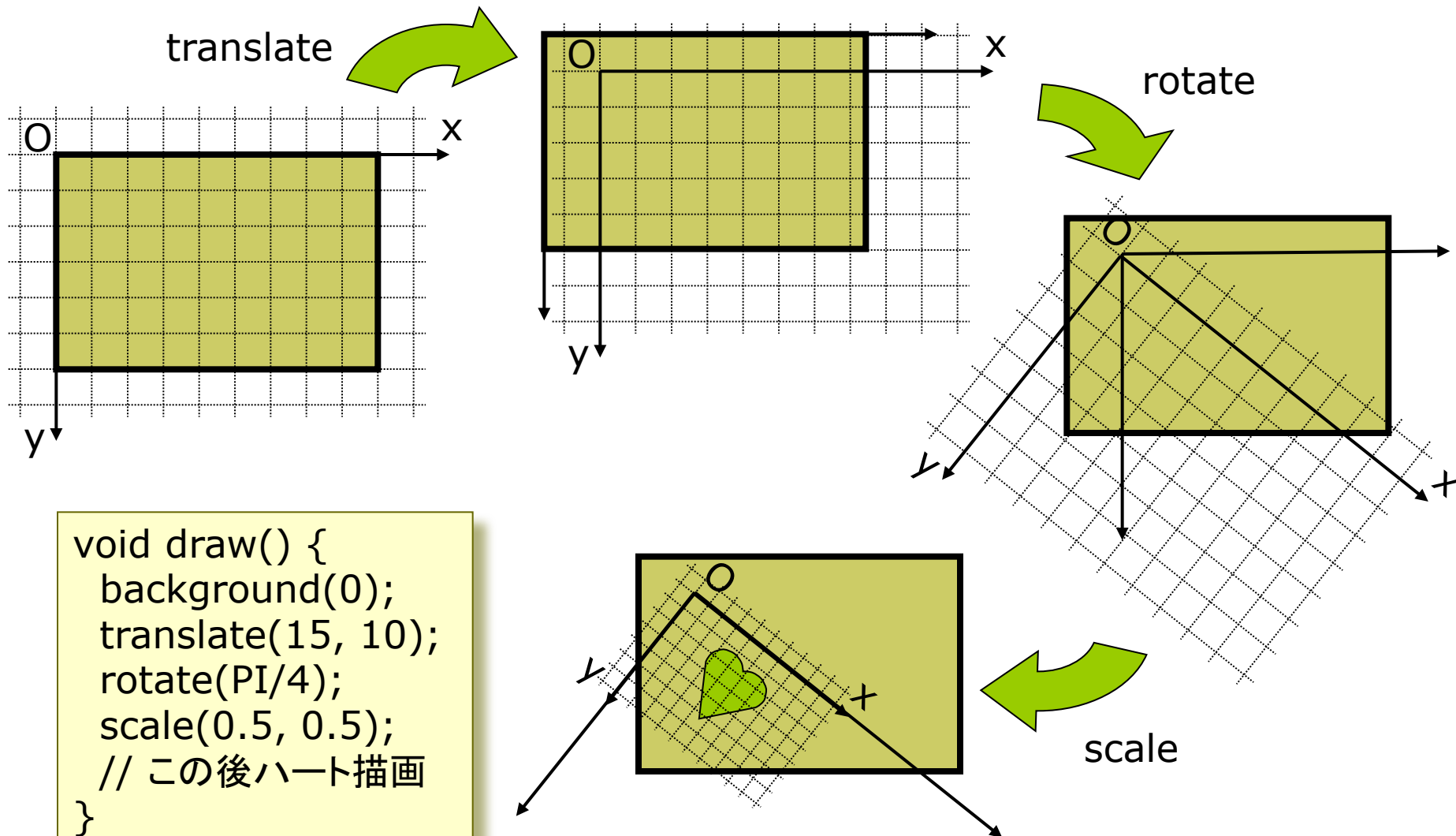
- 拡大・縮小

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 回転

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.6* 幾何変換の合成 (p.22)



6.7* 合成変換行列 (p.28)

合成変換の数学表現

- 変換がn回＝行列の積がn回

$$P_{win} = M_1 M_2 M_3 \cdots M_n P$$

$$M = M_1 M_2 M_3 \cdots M_n$$

- 右上の例の合成変換を表す行列

$$\begin{bmatrix} x_{win} \\ y_{win} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

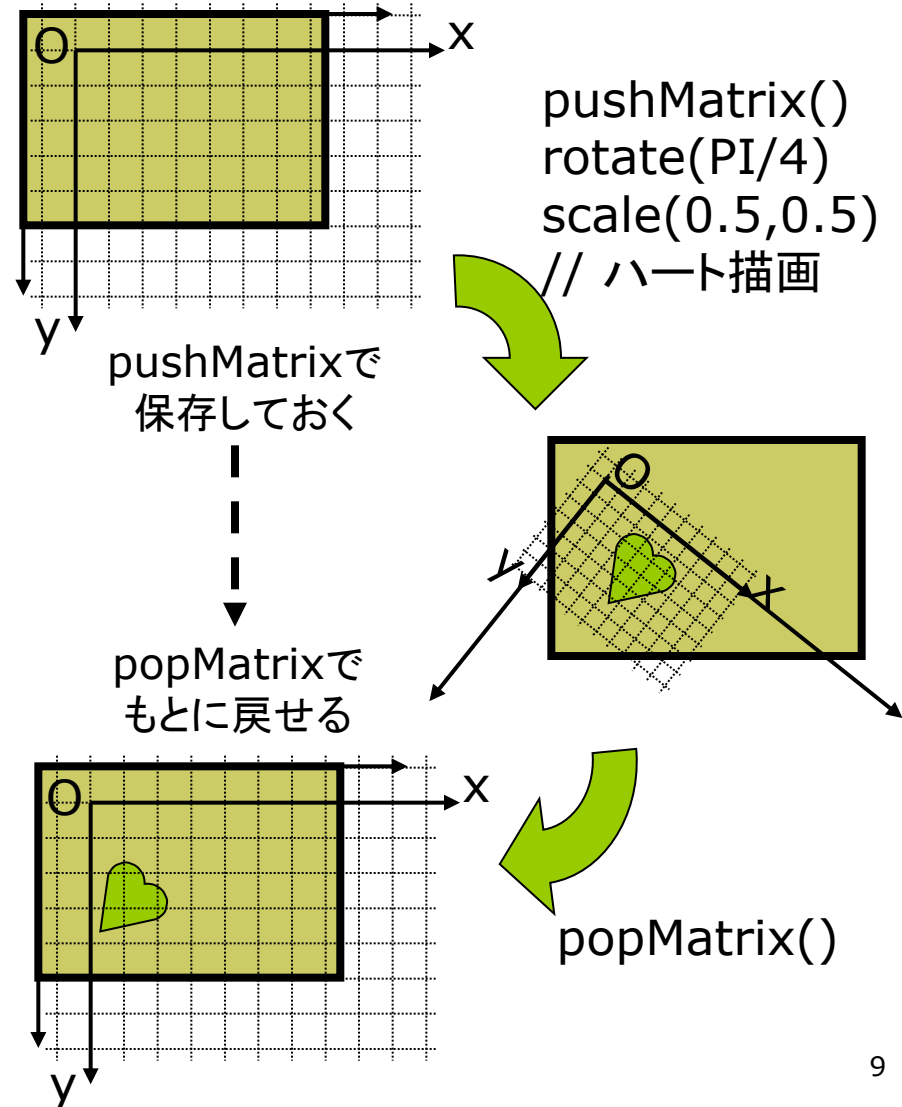
$$\begin{bmatrix} x_{win} \\ y_{win} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 & 15 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore M = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 & 15 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
void draw() {
  background(0);
  translate(15, 10); // 変換 M1
  rotate(PI/4);     // 変換 M2
  scale(0.5, 0.5);  // 変換 M3
  // 図形描画...
}
```


6.8 変換行列の操作 (p.54)

行列スタックの操作

- システム変換行列
 - 現在の座標系を示す行列
 - システム変換行列は幾何変換 (translate, rotate, scale) の処理のたびに合成されていく
- pushMatrix()
 - システム変換行列 (現在の座標系) を一時待避する
- popMatrix()
 - 最近保存した変換行列を戻す
 - pushMatrix() と必ず対にする
- resetMatrix()
 - 変換行列をリセットする
 - 画面座標系 = 論理座標系の初期状態に戻す



6.9 幾何変換と行列操作の例

```
// 描画の原点を移動する例
float bai = 1.0;

void setup() {
  size(400, 400);
  rectMode(CENTER);
  frameRate(30);
}

void draw() {
  background(255);
  translate(200, 200);
  scale(bai);
  strokeWeight(10);
  fill(128, 128, 255);
  rect(0, 0, 50, 50);
  bai += 0.02;
  if (bai > 8.0) bai = 1.0;
}
```

```
// 行列のpushとpopの例
void setup() {
  size(600, 400);
  rectMode(CENTER);
  noLoop();
}

void draw() {
  background(#8080e0);
  pushMatrix();
  translate(200, 200);
  fill(#ffd0d0); rect(0,0, 50, 50);
  popMatrix();
  pushMatrix();
  translate(400, 200);
  rotate(radians(45));
  fill(#ffff00); rect(0,0, 50, 50);
  popMatrix();
}
```

6.10* 演習課題

課題

- 6.11はスマイリー(にこちゃん)を2つ描画するプログラムである

問1) 中心と外側の顔の描画位置を決めている合成変換行列($M_{\text{中心}}$ と $M_{\text{外側}}$)の両方を求めなさい

- $M_{\text{中心}}$ は右のヒント参照
- 式は6.15を参考に簡単化せよ
- 次回, **A4レポート用紙**で提出

問2) このプログラムに幾何変換の関数を2つ加えて, 外側の顔の大きさを半分にして, 顔の向きは回転しないようにしなさい

- ただし, 顔を描画する関数は, 変更したり追加したりしないこと
- プログラムと画面イメージを提出

問1の $M_{\text{中心}}$ のヒント

- $M_{\text{中心}}$ は次の2つの変換の合成
 - $M_1 = \text{translate}(200, 200)$
 - $M_2 = \text{rotate}(-a)$
- それぞれの行列表現は

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos(-a) & -\sin(-a) & 0 \\ \sin(-a) & \cos(-a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $M_{\text{中心}}$ はこの2つの合成なので

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-a) & -\sin(-a) & 0 \\ \sin(-a) & \cos(-a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.11 演習課題(続き)

```
void setup() {
  size(400, 400);
  frameRate(30);
}

void draw_smiley() {
  ellipseMode(CENTER);
  strokeWeight(3);
  stroke(0); fill(#ffff00);
  ellipse(0, 0, 100, 100);
  noStroke(); fill(0);
  ellipse(-15, -15, 12, 12);
  ellipse( 15, -15, 12, 12);
  stroke(#ff0000); noFill();
  bezier(-25, 20, -10, 35,
         10, 35, 25, 20);
}
```

```
void draw() {
  float a = radians(frameCount);
  background(255);
  translate(200, 200); // 原点移動
  // ★
  pushMatrix();
  rotate(-a);
  draw_smiley();
  popMatrix();
  // ★
  pushMatrix();
  rotate(-a);
  translate(130, 0);
  // ここに2つ幾何変換を追加する
  draw_smiley();
  popMatrix();
  // ★
}
```

★のところ
の座標系は
同じになる

6.12 参考:せん断と鏡映(p.26)

せん(剪)断/スキュー/シアー

□ 斜めにゆがめる変換

- 座標系を平行四辺形にゆがめる
- 変換後も平行関係は保たれる



□ shearX(角度)

- x軸方向のせん断
- x軸より上は左に, x軸より下は右にずれていくように歪める
- y軸を指定の角度だけ傾ける

$$\begin{aligned} x' &= x + a y \\ y' &= y \end{aligned} \quad (a = \tan \theta)$$

□ shearY(角度)

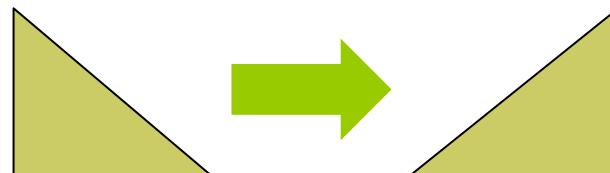
- y軸方向のせん断

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= b x + y \end{aligned} \quad (b = \tan \theta)$$

鏡映(反転)

□ 負の拡大縮小変換

- x軸またはy軸を基準に反転
- 例) scale(-1, 1)



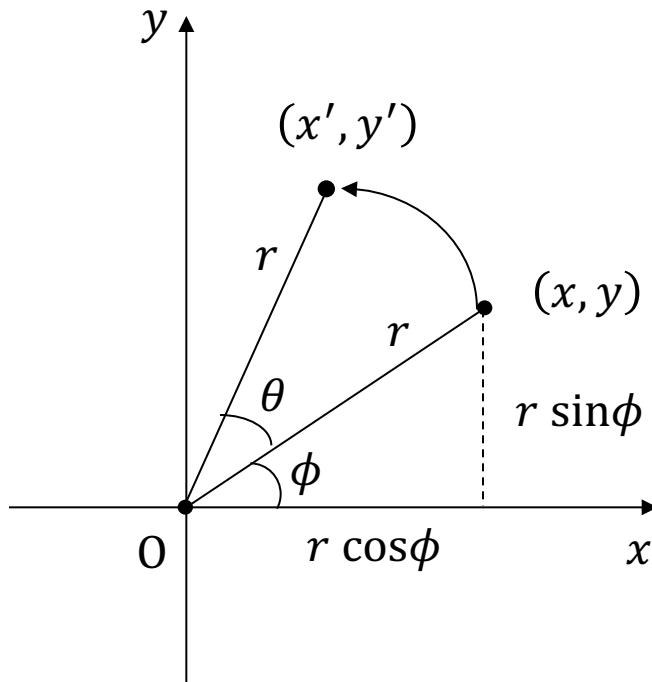
図の例の
変換式

$$\begin{aligned} x' &= (-1) \cdot x \\ y' &= y \end{aligned}$$

6.13 参考：回轉行列の導出

初期位置 (x, y) θ 回轉後 (x', y')

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \quad \begin{cases} x' = r \cos(\phi + \theta) \\ y' = r \sin(\phi + \theta) \end{cases}$$



展開計算(加法定理)

$$\begin{aligned} x' &= r (\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta) \\ &= r \cos \phi \cdot \cos \theta - r \sin \phi \cdot \sin \theta \\ &= x \cos \theta - y \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r (\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta) \\ &= r \sin \phi \cdot \cos \theta + r \cos \phi \cdot \sin \theta \\ &= y \cos \theta + x \sin \theta \\ &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

行列形式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

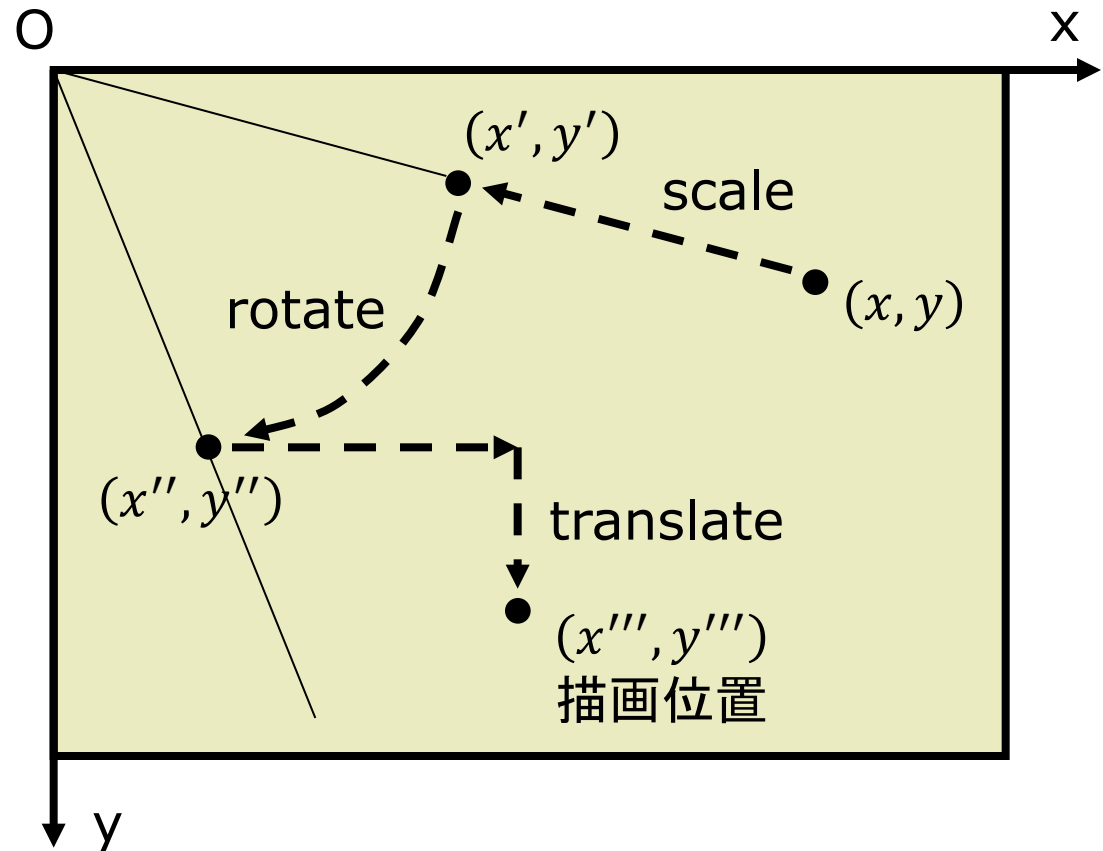
6.14 参考：図形移動での考え方 (p.29)

座標変換の別の解釈

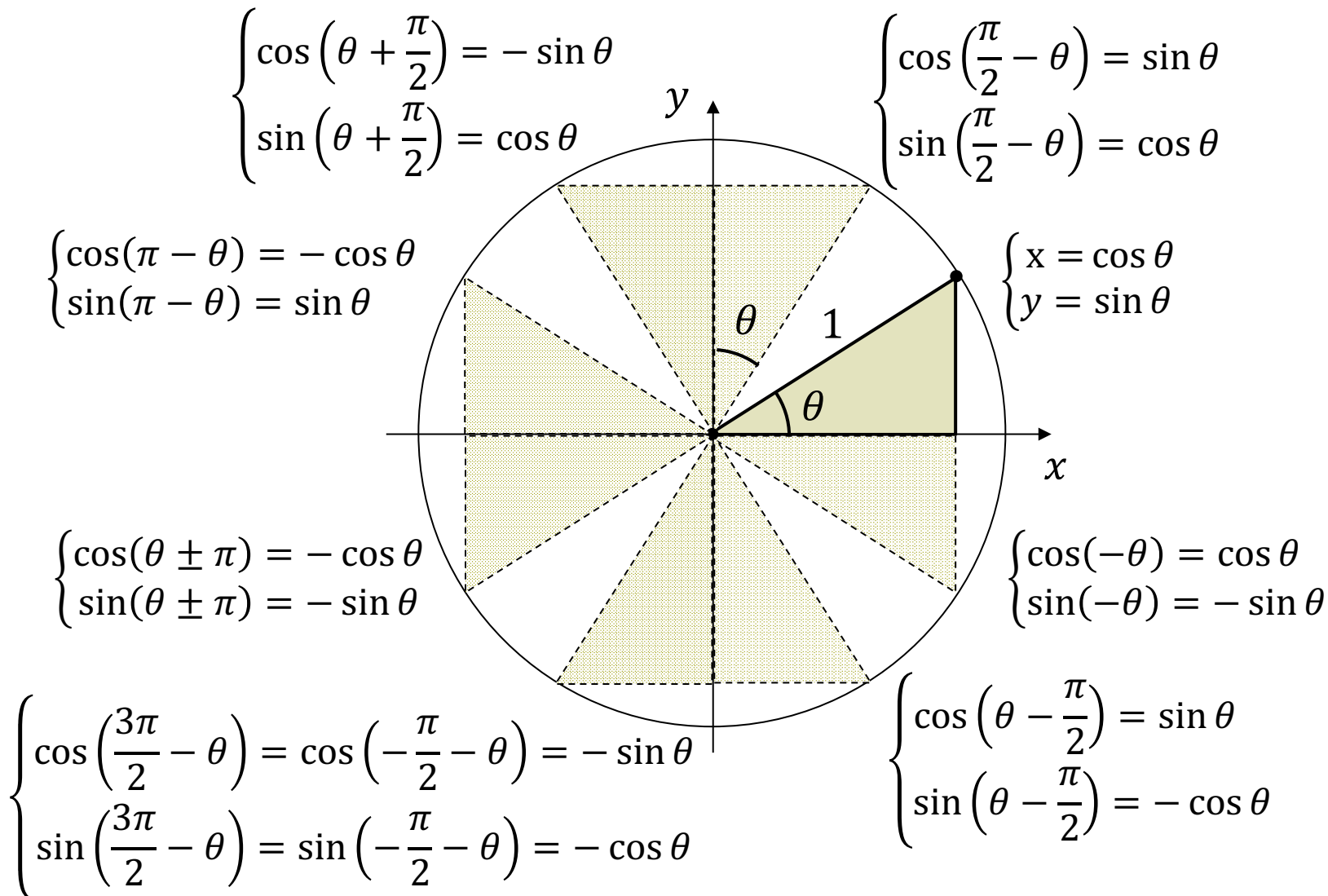
- 座標系の移動ではなく、同じ画面座標系上での図形の移動として考えることもできる
- その場合、描画からさかのぼって、図形に命令の逆順で変換を作用させる
- 数学的に等価
= 結果はどちらも同じ
- 右図の例

```
translate(15, 10);
rotate(PI/4);
scale(0.5, 0.5);
point(x, y);
```

下から順に作用させる



6.15 参考:三角関数の関係式



6.16 参考: 行列計算の確認

$$\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \\ 1 \end{bmatrix}$$

i 行目

j 行目

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ c_1 & d_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & e_2 \\ c_2 & d_2 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左の行列の i 行目と
右の行列の j 列目の内積
= 積の行列の i 行 j 列

$$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 & a_1 e_2 + b_1 f_2 + e_1 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 & c_1 e_2 + d_1 f_2 + f_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$