

# Graphics with Processing



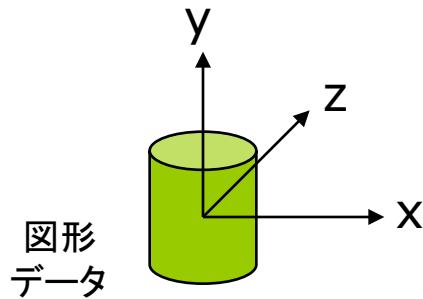
2015-09 投影変換と隠面消去

<http://vilab.org>

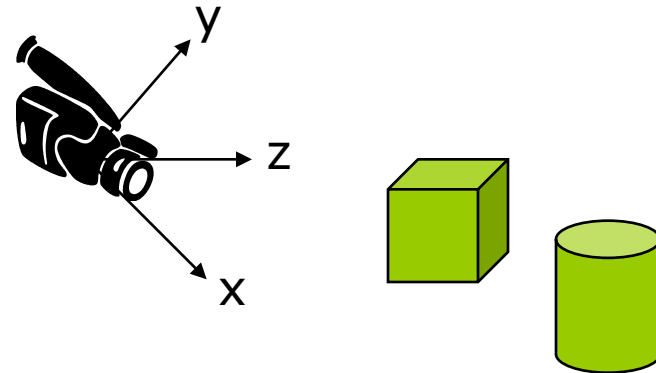
塩澤秀和

# 8.1 3DCGの座標系 (p.49)

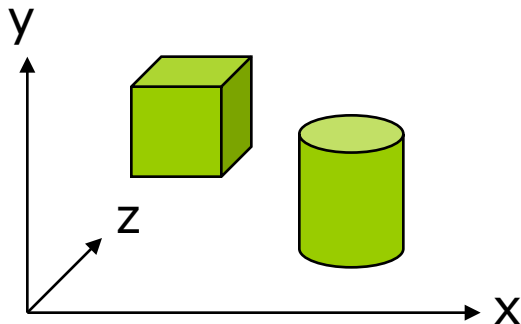
- ローカル(モデリング)座標系
  - オブジェクトの座標系



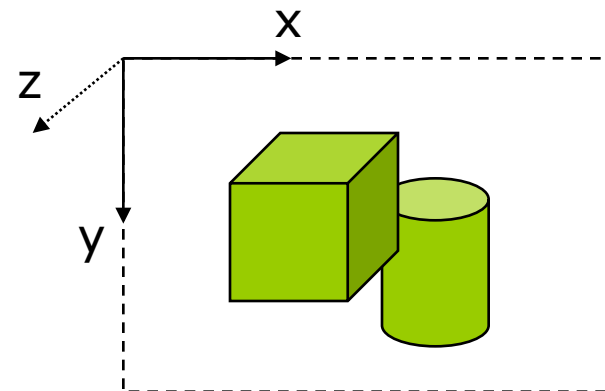
- 視点(カメラ)座標系



- ワールド座標系
  - 3次元世界の座標系

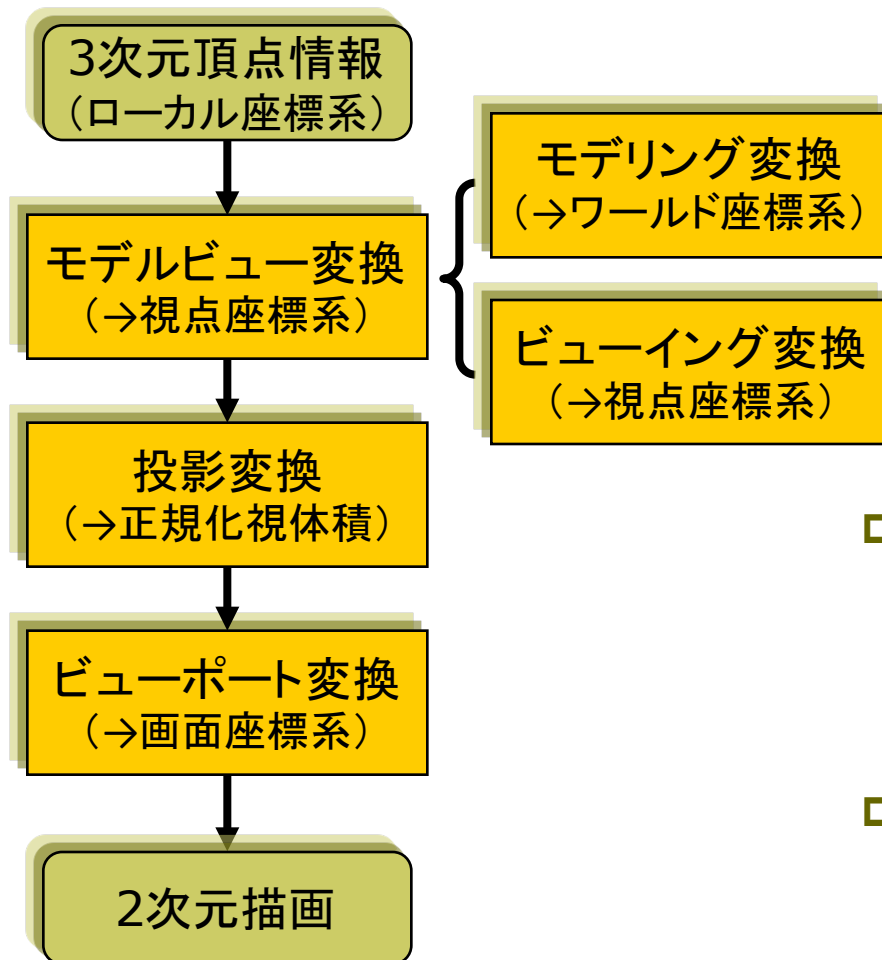


- 画面(デバイス)座標系



## 8.2 3DCGの座標変換 (p.49)

### □ ビューイングパイプライン



### □ モデルビュー変換

- オブジェクト(図形・物体)と視点(カメラ)の位置関係の設定
- モデリング変換:  
オブジェクトの配置
- ビューイング変換(視野変換):  
視点の位置設定
- `translate()`, `scale()`,  
`rotate{X,Y,Z}()`, `camera()`

### □ 投影変換(次回)

- 投影面へ(正規化視体積へ)
- 平行投影: `ortho()`
- 透視投影: `perspective()`

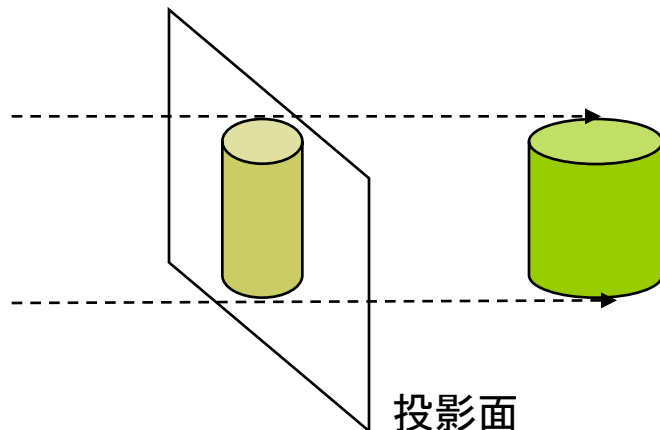
### □ ビューポート変換

- 正規化視体積から画面座標へ(自動)

# 9.1 平行投影と透視投影 (p.38)

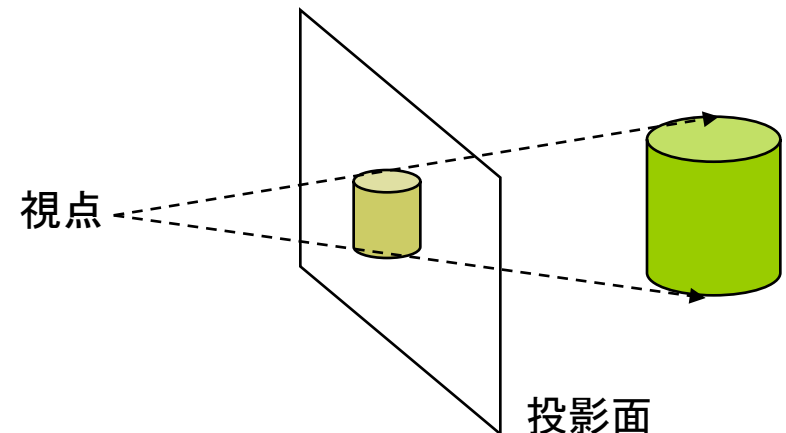
## 平行投影(直交投影)

- `ortho(xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax)`
- 遠近感をつけない投影方法
- 画面に表示するx, y, z座標の範囲(視体積)を設定
- サンプル
  - Basics (3D) → Camera



## 透視投影(透視図法)

- `pserspective()`
  - 近くのを大きく、遠くのを小さく、遠近法を使って描画する
  - 投影面に映る大きさを計算
- `perspective(fov, aspect, zNear, zFar)`
  - 視野角(画角)などを指定



## 9.2 透視投影 (p.39)

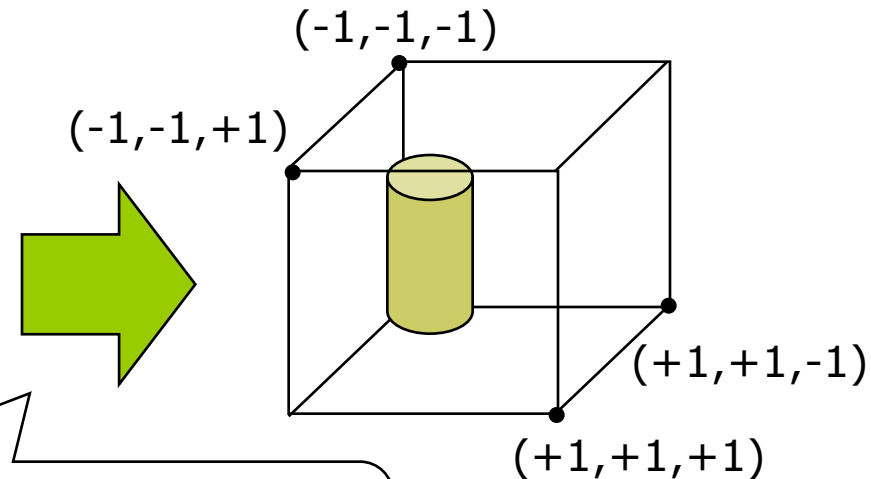
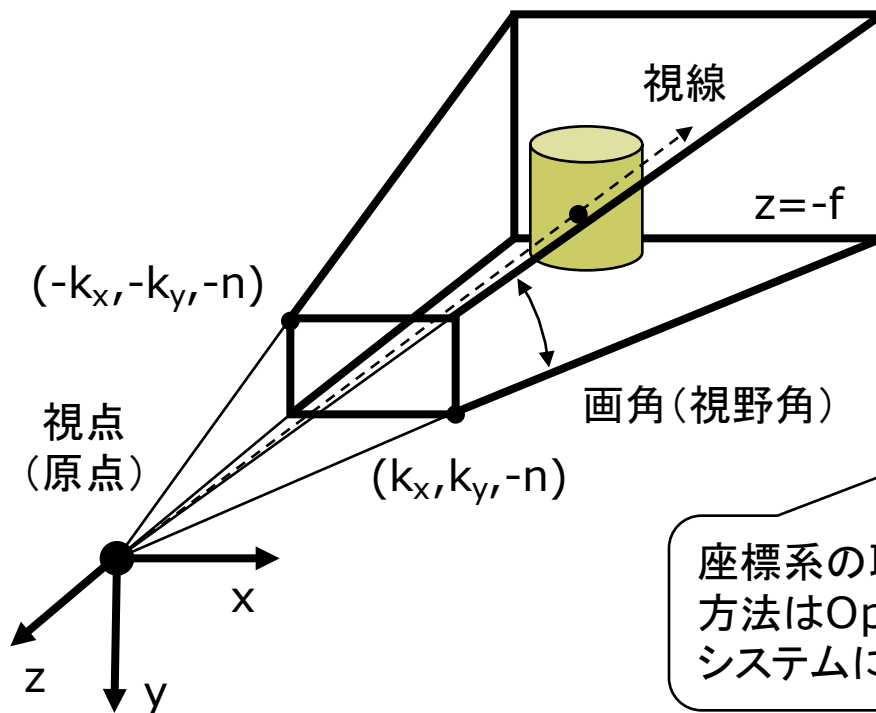
### 透視投影

#### □ 視体積 (ビューボリューム)

- 画角 (視野角)  $\Rightarrow$  見える範囲
- 画角大 = 広角, 画角小 = 望遠
- 透視投影の視体積は四角錐台

#### □ 正規化視体積

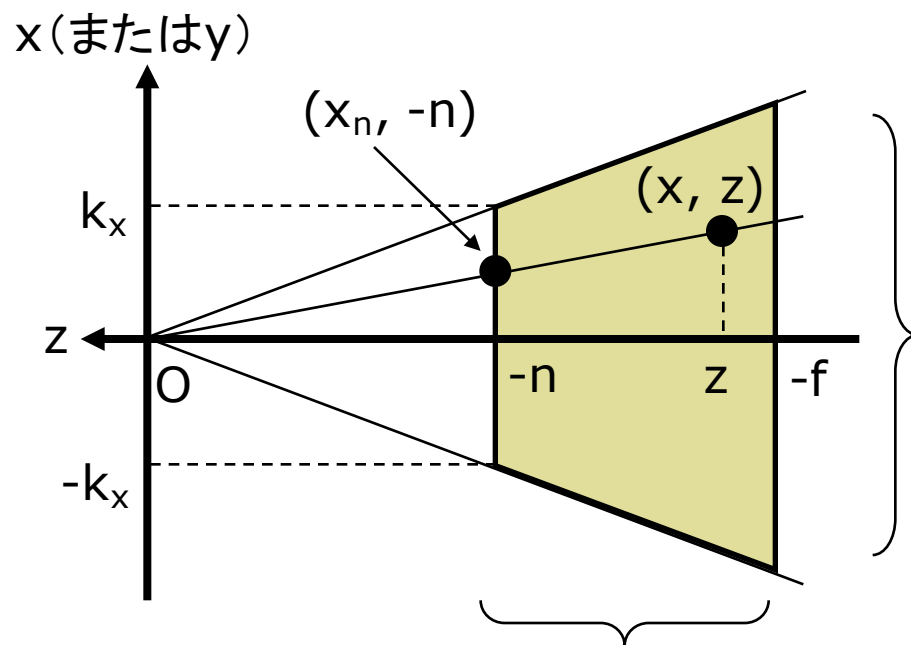
- 各座標の値を  $-1 \sim +1$  に正規化
- 四角錐台  $\rightarrow$  立方体
- 空間が歪み, 視点から遠いものほど大きく縮む  $\Rightarrow$  遠近感
- $z$ 座標は  $0 \sim 1$  にする方式もある



座標系の取り方や  $z$ 座標の計算方法は OpenGL, DirectX などシステムによって若干異なる

## 9.3 透視投影の計算 (p.43参考)

### 視体積の正規化



z座標も,  $-1 \sim +1$ の範囲に収める

$z = -n$  のとき  $z_p = +1.0$

$z = -f$  のとき  $z_p = -1.0$

OpenGL/Processingの計算式  $\Rightarrow$   
(教科書的方式は,  $0.0 \sim 1.0$ )

三角形の相似より( $z < 0$ に注意)

$$x_n : n = x : -z \quad (\text{y軸も同様})$$

$$\therefore x_n = x \cdot \frac{n}{-z}, \quad y_n = y \cdot \frac{n}{-z}$$

$x, y$ 座標を $-1 \sim +1$ の範囲に収める

$$x_p = \frac{x_n}{k_x} = \frac{n}{k_x} \cdot \frac{x}{-z}$$

$$y_p = \frac{n}{k_y} \cdot \frac{y}{-z}$$

$$z_p = -\frac{z(f+n) + 2fn}{-z(f-n)}$$

## 9.4 透視投影行列 (p.43参考)

### □ 同次座標で表現

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \\ w'_p \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_p &= x'_p / w'_p \\ y_p &= y'_p / w'_p \\ z_p &= z'_p / w'_p \end{aligned}$$

9.3の式を同次座標で表す  
このとき  $w'_p = -z$  とすると便利

$$x'_p = \frac{n}{k_x} x \quad y'_p = \frac{n}{k_y} y$$

$$z'_p = -\frac{f+n}{f-n} z - \frac{2fn}{f-n}$$

$$w'_p = -z$$

$w'_p$ に視点からの  
奥行情報が残る

### □ 透視投影行列

#### ■ OpenGL/Processingの方式

$$\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \\ w'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{k_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{k_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$P_{proj} = M_{proj} P_{view}$$

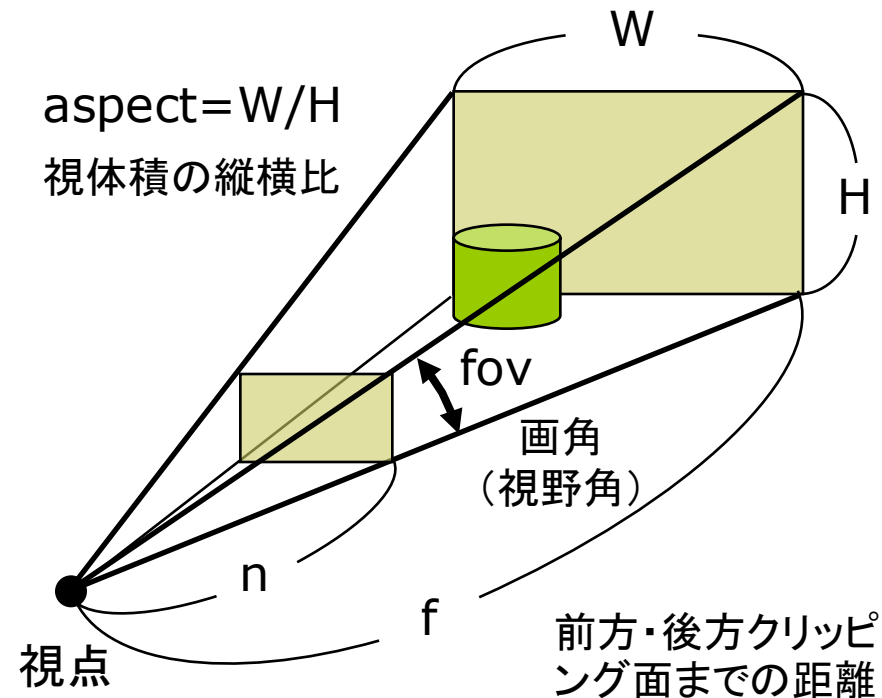
### □ ここまでの座標変換の合成

$$P_{proj} = M_{proj} M_{view} M_{model} P_{local} \quad 7$$

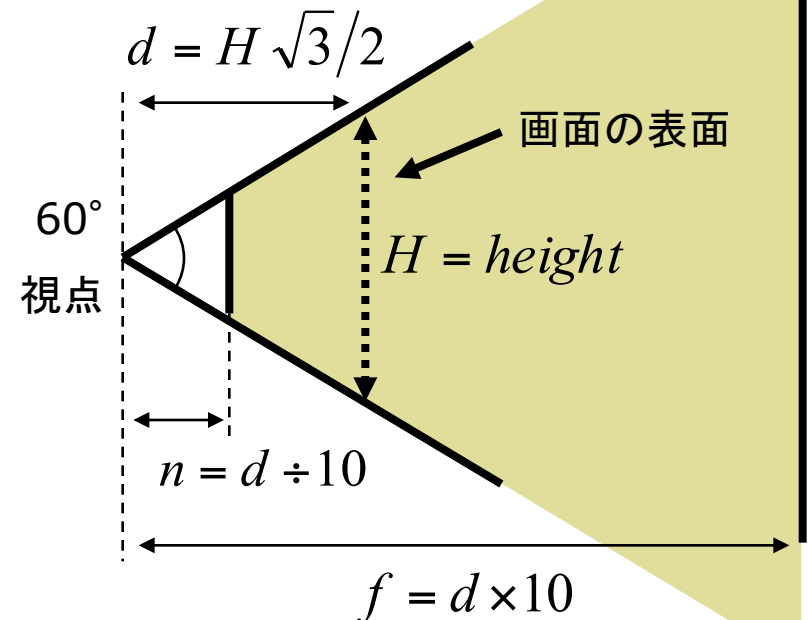
## 9.5 透視投影関数

### 透視投影関数

- perspective(fov, aspect, n, f)
  - ただし、すべての引数はゼロ以外
  - aspectは、floatで計算すること
  - バージョン1.x ⇒ OpenGLが正確



- Processingのデフォルト設定
  - perspective()を呼ばない場合
  - または、引数なしで呼んだ場合
  - 画角(視野角) =  $60^\circ$  ( $\pi / 3$ )
  - aspect = width / height

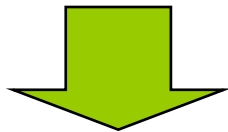
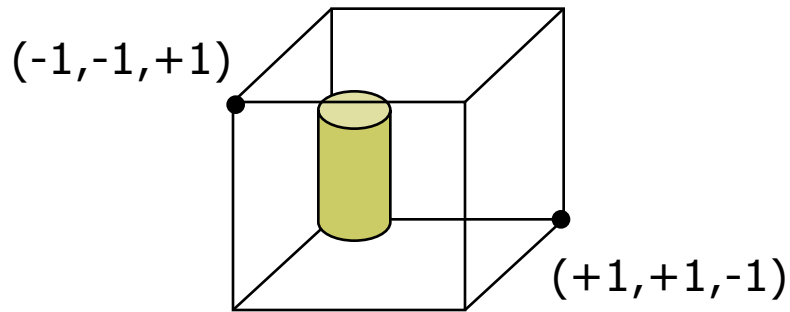




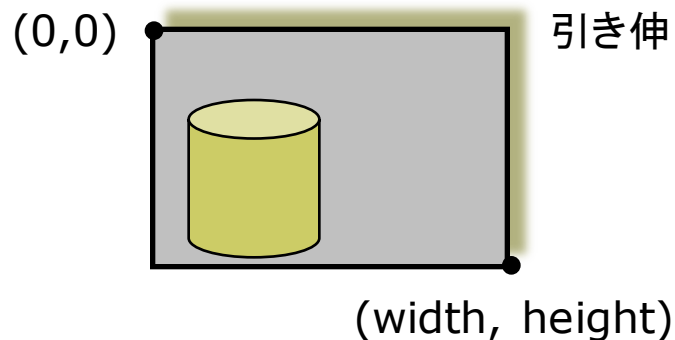
# 9.6 ビューポート変換とクリッピング

## ビューポート変換 (p.50)

### □ 正規化視体積



### □ デバイス座標系



画面サイズに  
引き伸ばす

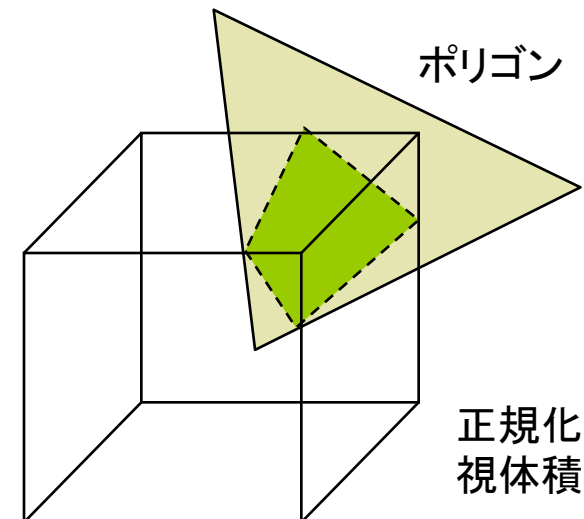
## 3次元クリッピング (p.53)

### □ 線分のクリッピング

- コーエン・サザランド法 (4.6)
- z座標を加えた6ビットコード

### □ ポリゴンのクリッピング

- ポリゴンの形状が変わるので、分割処理等が必要になる
- 特に三角形しか扱えない場合



## 9.7 隠面消去(1)

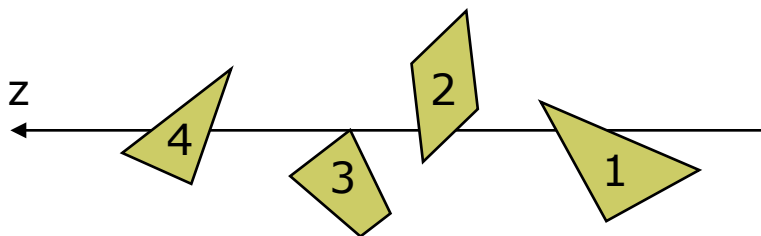
### 隠面消去(隠線・隠面処理)

#### □ 隠面消去とは

- 他の物体などに隠れて見えない物体(の全部または一部)を描画しない処理
- 弱点を補い合ういくつかの手法を組み合わせることもある

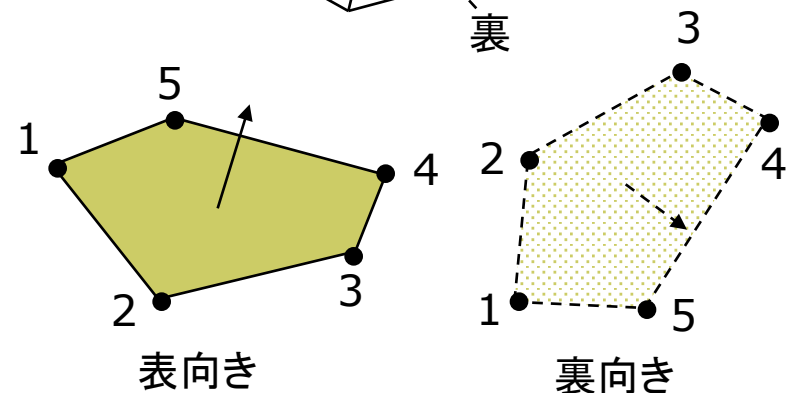
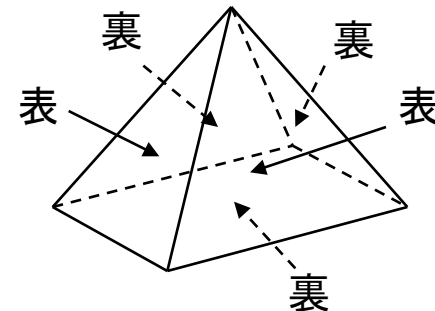
#### □ 奥行きソート法(p.127)

- ポリゴンをz座標(視点座標)で並び替え, 遠くから順に描画
- 細長いポリゴンで問題が生じる



#### □ バックフェースカリング(p.126)

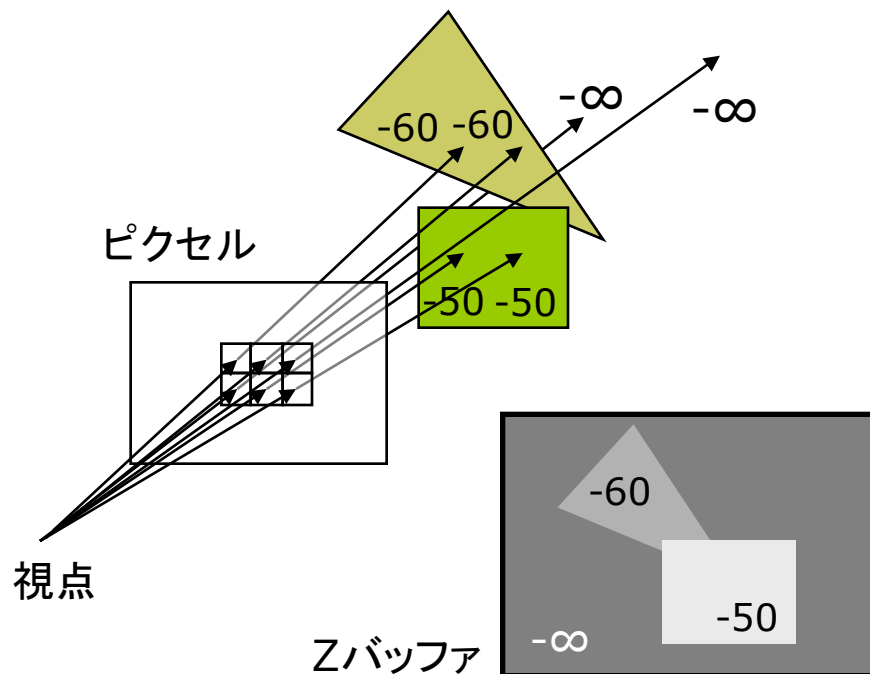
- ポリゴンに表裏を設定し, 裏側を向いているポリゴンを描画しない
- 表裏はポリゴン作成時の頂点の順序(右回り・左回り)で指定
- 各凸多面体での隠面消去



## 9.8 隠面消去(2)

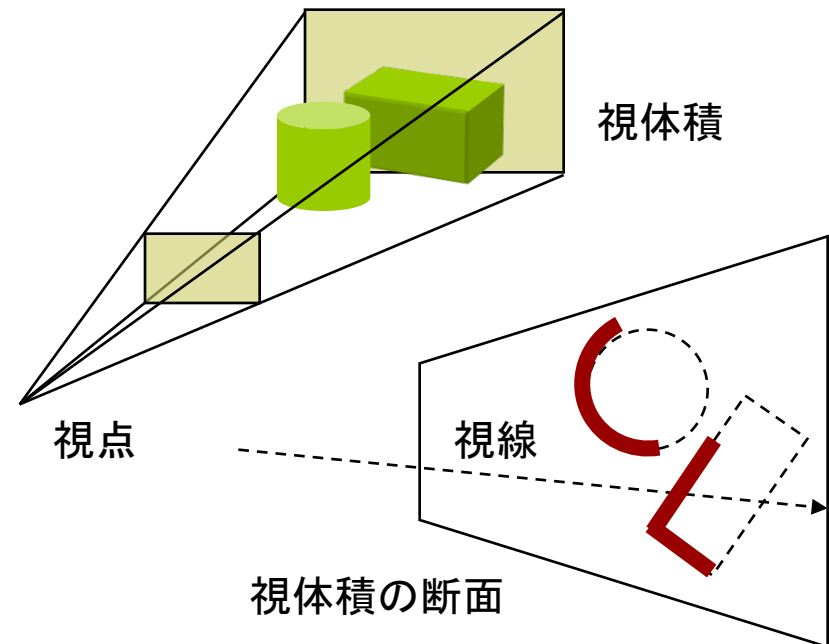
### □ Zバッファ法(p.133)

- 画面上の全ピクセルに z座標を持たせ, 1点1点描画するとき遠近関係をチェックする
- 単純&高速 ⇒ ハードウェア化
- 半透明の重なり処理に難点



### □ スキャンライン法(p.130)

- ピクセル横1行(スキャンライン)ごとにポリゴンの断面の重なりを数学的に計算し, 描画する
- 計算は複雑だが, 使用メモリが少ない



## 9.9 演習課題

### 課題

問1) 9.10のプログラムに適切な処理を補って、実行してみなさい

- 適当なsetup関数を補う

1. 紙飛行機が遠くから手前に近づいてきて、カメラの横を飛び去っていくようにしなさい

- 飛び去ったら、元の位置に戻って繰り返すようにしなさい

- ヒント: translate

2. カメラの向きを紙飛行機をずっと追跡するようにしなさい

- ヒント: camera

3. マウスのボタンでカメラを望遠に切り替えられるようにしなさい

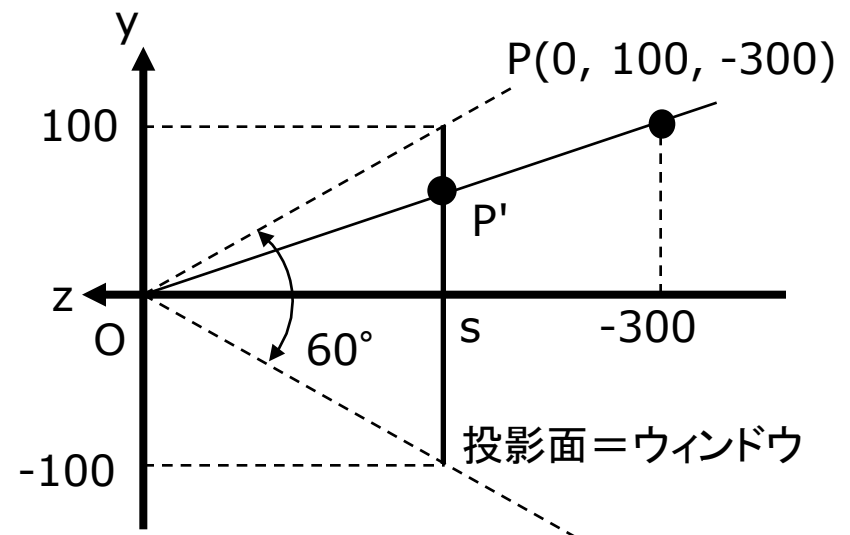
- ヒント: perspective

問2) 下図は投影変換の原理を示したものである(ウィンドウサイズは  $200 \times 200$ , 画角は  $60^\circ$  とする)

1.  $P'$ のz座標  $s$  を求めなさい

2. 視点座標系で  $(0, 100, -300)$  に変換された点  $P$  が、投影面上に写像される座標  $P'$  を求めなさい

- 次回, **A4レポート用紙**で提出



## 9.10 演習課題 (続き)

---

```
void draw() {
  background(50, 50, 100);

  // 画角の設定
  perspective(PI/3, (float) width /
             height, 10, 10000);

  // カメラの位置と撮影目標の設定
  camera(-150, -500, 1500,
         0, 0, 0, 0, 1, 0);

  // 照明の光を上からに変更
  pushMatrix();
  rotateX(PI/2); lights();
  popMatrix();

  fill(255); noStroke();
  pushMatrix();
  translate(0, -300, 1200);
  paperplane();
  popMatrix();
```

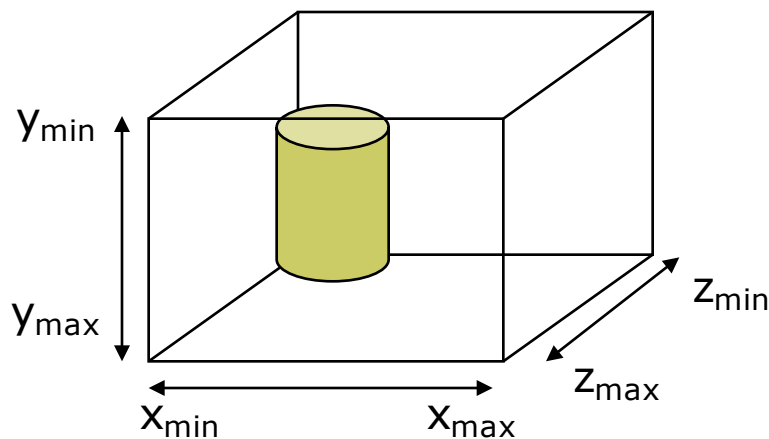
```
  fill(0, 50, 0); noStroke();
  for (int i = -10; i <= 10; i++) {
    for (int j = -10; j <= 10; j++) {
      pushMatrix();
      translate(i*200, 0, j*200);
      box(180, 10, 180);
      popMatrix();
    }
  }
}

// 紙飛行機のモデル
void paperplane() {
  beginShape(TRIANGLE_FAN);
  vertex(0, 0, 0);
  vertex(-30, 5, -50);
  vertex(-5, 0, -50);
  vertex(0, 20, -50);
  vertex(5, 0, -50);
  vertex(30, 5, -50);
  endShape();
}
```

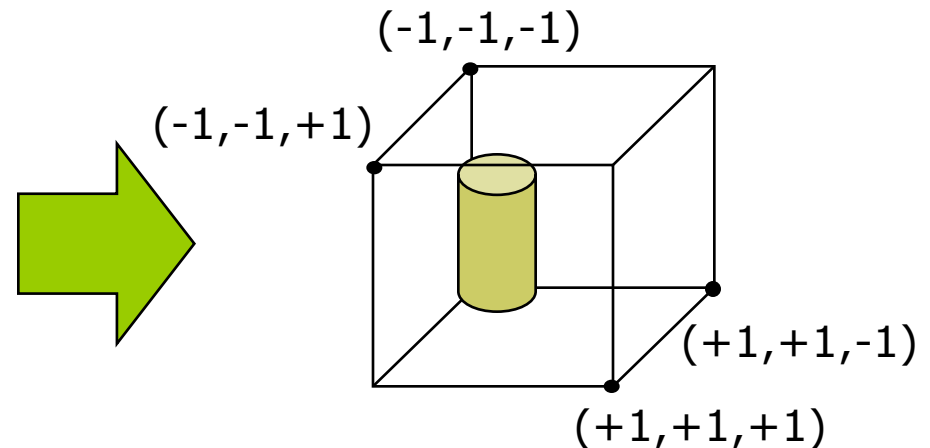
## 9.11 参考：平行投影 (p.45)

### 平行投影(直交投影)

- 視体積(ビューボリューム)
  - 視体積=「見える領域」
  - 平行投影の視体積は直方体



- 正規化視体積
  - 各座標の値を-1~+1に正規化
  - 直方体 → 立方体
  - z座標は0~1にする方式もある



### 平行投影関数

- $\text{ortho}(x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max})$

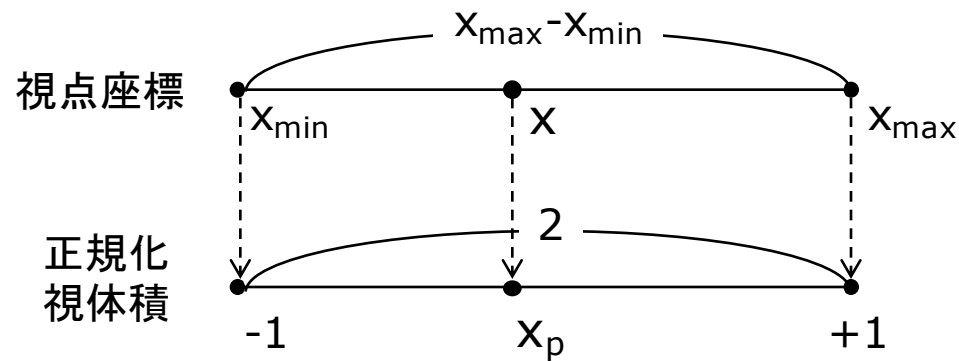
- 計算式

$$x_p = \frac{2x - (x_{\max} + x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}}$$

$y, z$  も同様(教科書は $z$ は0~1)

# 9.12 参考：平行投影行列 (p.45参考)

## □ 平行投影の計算



$$\begin{aligned}
 x_p &= \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \times 2 - 1 \\
 &= \frac{2x - (x_{\max} + x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}} \\
 &= \frac{2x}{x_{\max} - x_{\min}} - \frac{x_{\max} + x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}
 \end{aligned}$$

y座標,  
z座標も  
同様

## □ 変換行列による表現

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & 0 & -\frac{x_{\max} + x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \\ 0 & \frac{2}{y_{\max} - y_{\min}} & 0 & -\frac{y_{\max} + y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{z_{\max} - z_{\min}} & -\frac{z_{\max} + z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

正規化  
視体積  
の座標

視点  
座標