

アルゴリズムとデータ構造

第3回 2分探索法と計算量

第3回のキーワード

2

アルゴリズム関係

- 2分探索 (binary search)
- $O(\log n)$
- 再帰による2分探索

Java関係

- compareTo

この資料は図解が中心なので、文章は説明不足の部分もあります。
講義内容をノートに取り、演習課題や参考書の説明もよく読みましょう。

もっと速い探索方法はないの？

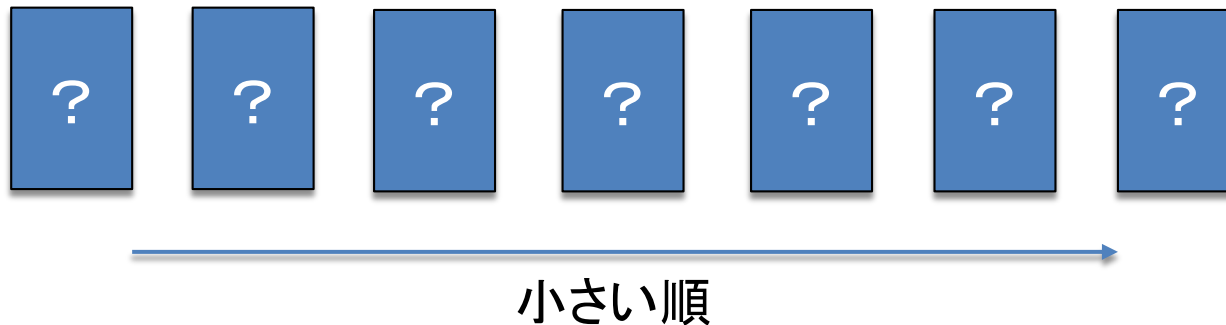
3

- 前回紹介「線形探索」
 - ▣ 先頭から順番に調べていくしかないのか？
 - ▣ コンピュータなら、1000人の名前がバラバラに並んだ名簿からでも一瞬で検索できるけど...
- データ構造を工夫する
 - ▣ もっと効率的に探し出すためには、どうすればいいか？
 - ▣ **世の中の情報**は、どのように整理してあるだろうか？
- 探索の高速化戦略
 - ▣ 整列しておく ⇒ 今回説明
 - ▣ 分類しておく ⇒ 似たようなことは次回以降説明

2分探索の考え方

4

- トランプにたとえると...
 - ▣ 裏返しのカードが、数の**小さい順**に並んでいる
 - ▣ この中で探したいカードはどこにあるか？

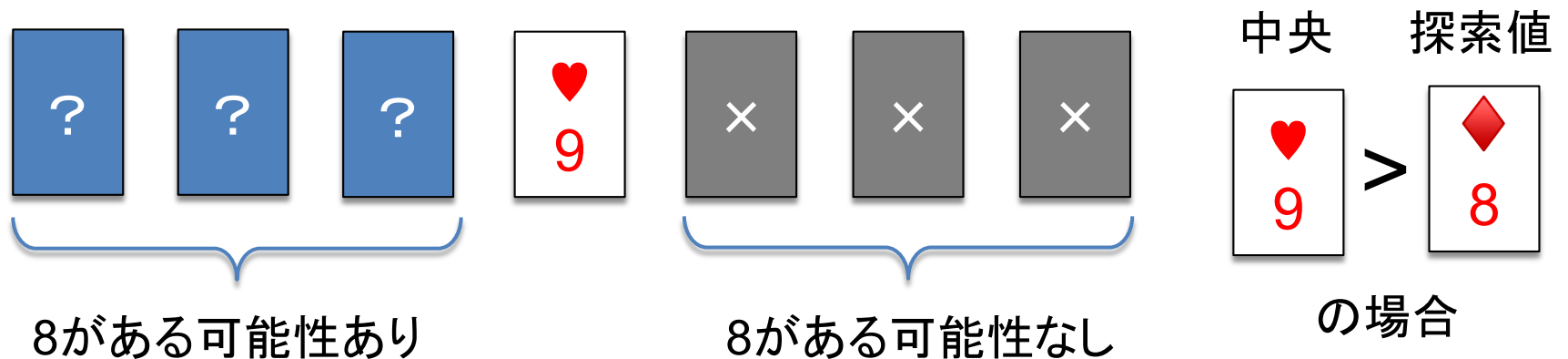
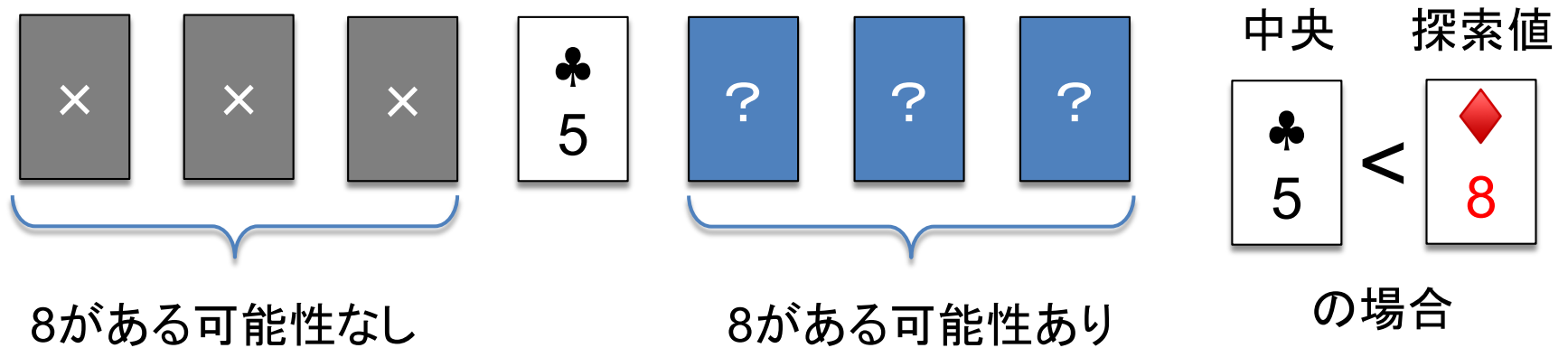


- 戦略を考えてみよう
 - ▣ まず、真ん中のカードを開けると何がわかるか？
 - ▣ 候補が半分ずつに減っていく(半分→4分の1→8分の1...)

2分探索の考え方

5

□ 中央を開けると探索範囲を半分に絞り込める



2分探索のアルゴリズム

6

□ データ

- ▣ 配列の要素は、小さい順(または大きい順)に並べておく
- ▣ 探索する値をkeyとする

この準備が高速化のポイント！
(タダで高速化できているわけではない)

□ アルゴリズム

- ▣ 配列(探索範囲)の中央にある値とkeyを比較する
- ▣ もし両者が等しければ、発見したのでその位置を返す
- ▣ もしkeyの方が小さければ、探索範囲を前半分にせばめる
- ▣ もしkeyの方が大きければ、探索範囲を後半分にせばめる
- ▣ 以上の手順を、探索範囲に要素がなくなるまで繰り返す
- ▣ 探索範囲に要素がなくなったら、keyは含まれていない

確認問題

7

□ 2分探索の理解

- 下記は線形探索の確認問題で使った配列である

a	60	80	20	30	50	90	10	70	40
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- 配列aの内容を「2分探索」が適用できるように変更せよ

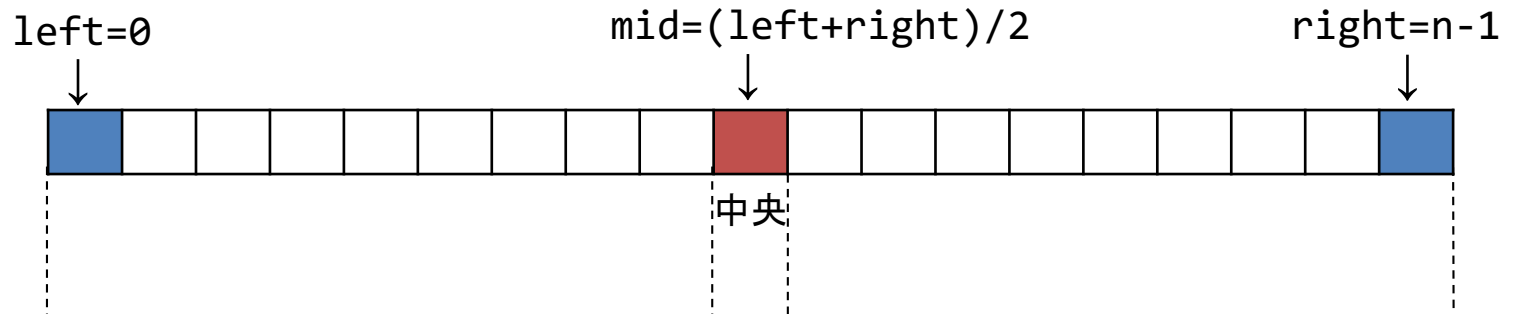
a									
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 変更された配列から2分探索で「8」を探すとき、発見するまでに比較される要素の値を順に示せ
 - 探索範囲が偶数個の場合、中央の要素として先頭に近い方を使う
- 変更された配列の全要素について、2分探索の何回目の比較で発見できるか示せ

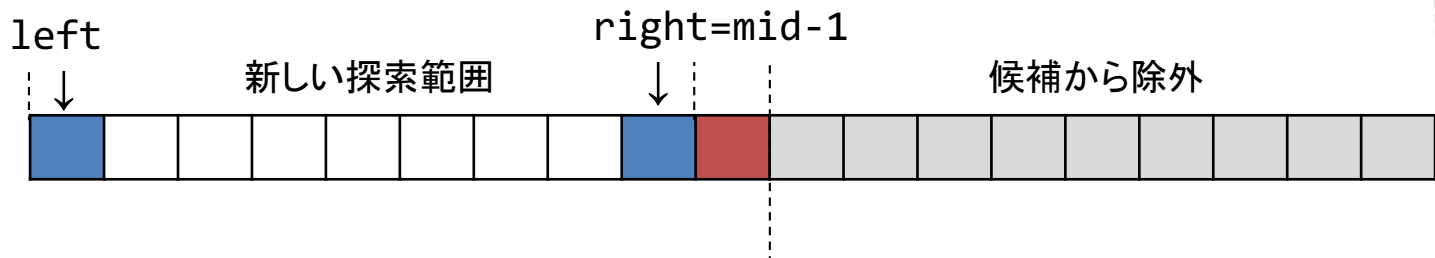
探索範囲のせばめ方

8

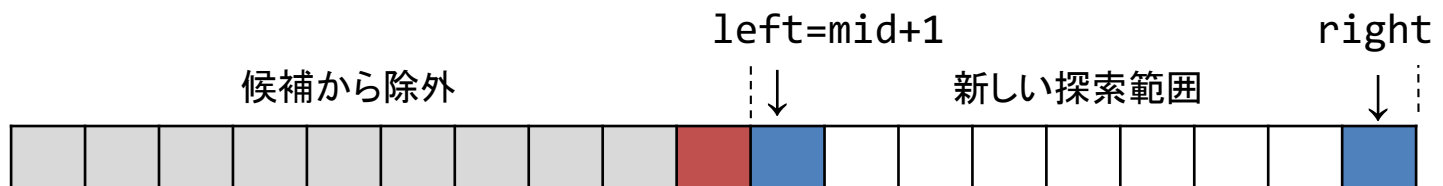
探索範囲の左端と右端を表す変数を使う



左半分にせばめるときは、右端を動かす



右半分にせばめるときは、左端を動かす



確認問題

9

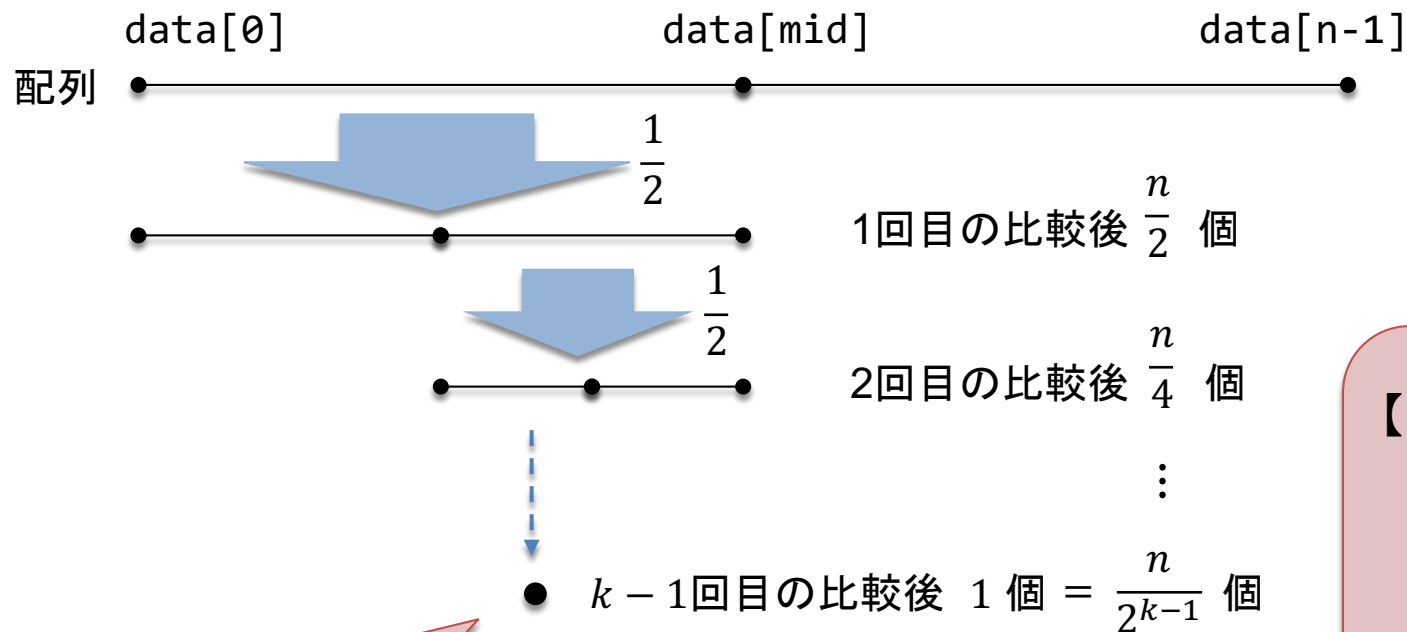
□ 必要な処理を追加してプログラムを完成させよ

```
public static int binarySearch(int key, int[] data) {  
  
    int left = 0; // 探索範囲の左端  
    int right = data.length - 1; // 探索範囲の右端  
  
    while (left <= right) { // 探索範囲が1個以上である間繰り返す  
        int mid =  
  
        if (key == data[mid]) {  
  
        } else if (key < data[mid]) {  
  
        } else {  
  
        }  
    }  
    return -1; // 発見できなかった場合は-1を返す  
}
```

2分探索の最大計算量

10

総比較回数を仮に k 回とおき, k を求める



残りが1個になるのは, 最後の比較をする直前だから, $k-1$ 回目の比較後である

$$\frac{n}{2^{k-1}} = 1$$

$$n = 2^{k-1}$$

$$k = \log_2 n + 1$$

$n \rightarrow \infty$ を考え
 $O(\log n)$

【logの定義】

$$y = a^x$$

のとき

$$x = \log_a y$$

2分探索の平均計算量

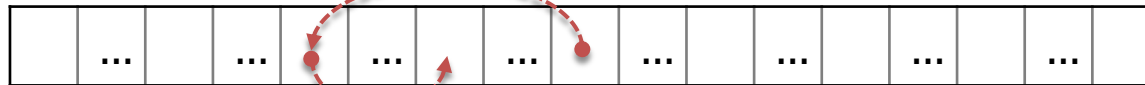
11

簡単のため
 $n = 2^k - 1$ とする

中点→“四分”点→
 “八分”点と比較

data[0] data[mid] data[n-1]

配列



そこにkeyが
ある確率

$\frac{1}{n}$ $\frac{1}{n}$ $\frac{1}{n}$ $\frac{1}{n}$... $\frac{1}{n}$... $\frac{1}{n}$...
 \times \times \times \times ... \times ... \times ...

比較回数の期待値

1回目で発見 1個

1

$$= \frac{1}{n} \times 1 \times 1$$

2回目で発見 2個

2

2

$$= \frac{1}{n} \times 2 \times 2$$

3回目で発見 4個

3

3

3

3

$$= \frac{1}{n} \times 3 \times 4$$

⋮

...

...

...

...

...

...

...

...

⋮

k回目で発見
 2^{k-1} 個

k k k k k k k k ...

$$= \frac{1}{n} \times k \times 2^{k-1} \left(+ \right.$$

全部で $\frac{1-2^k}{1-2}$ 個

さらに $n = 2^k - 1$ を
 使って n の式にせよ

$$\frac{1}{n} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \cdots + k \cdot 2^{k-1})$$