アルゴリズムとデータ構造

第13回　2分探索木とAVL木

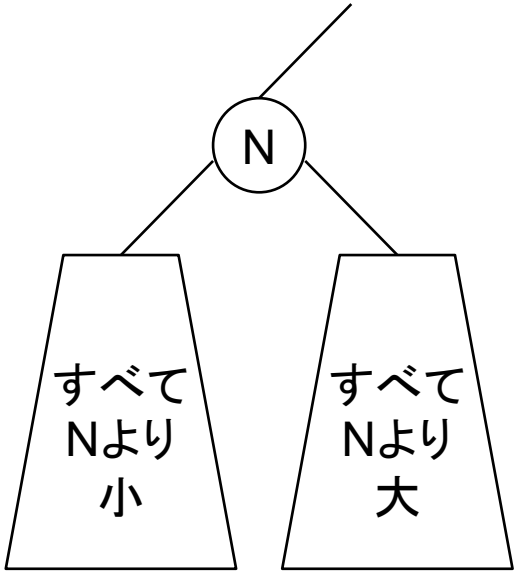
第13回のキーワード

アルゴリズム関係

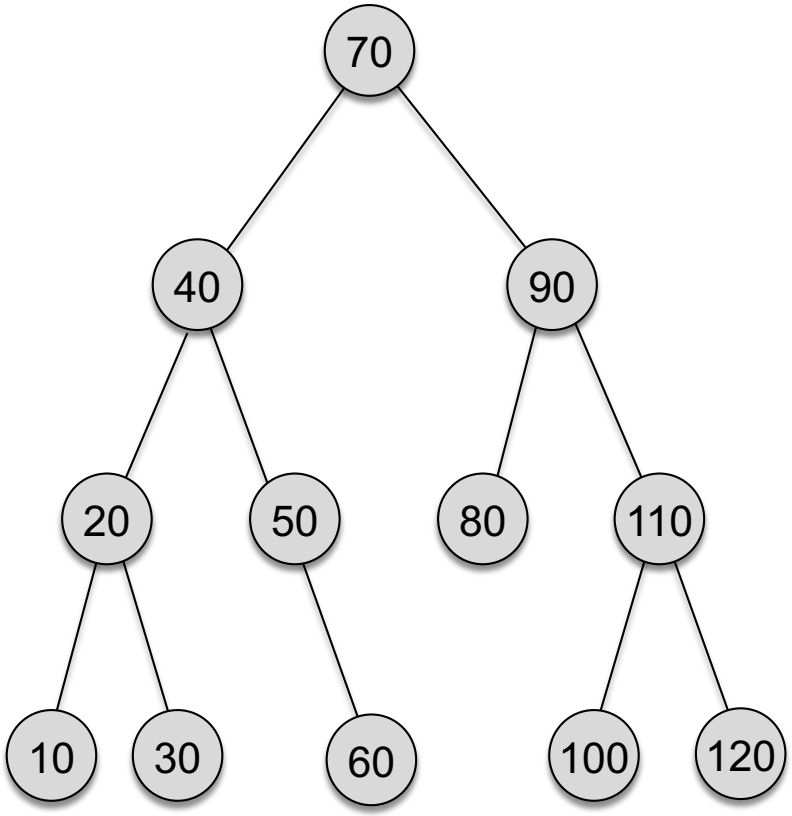
- 2分探索木
  （binary search tree）
- 平衡木（balanced tree）
- AVL木（Adelson-Velsky and Landis' tree）←2人
- 木の回転（tree rotation）
- 1重回転 / 2重回転
  （single/double rotation）
- $O(\log n)$

2分探索木

- 定義
  - 任意のノードNについて
  - Nの左の子孫（左の部分木の要素）は，すべてNより小さい
  - Nの右の子孫（右の部分木の要素）は，すべてNより大きい



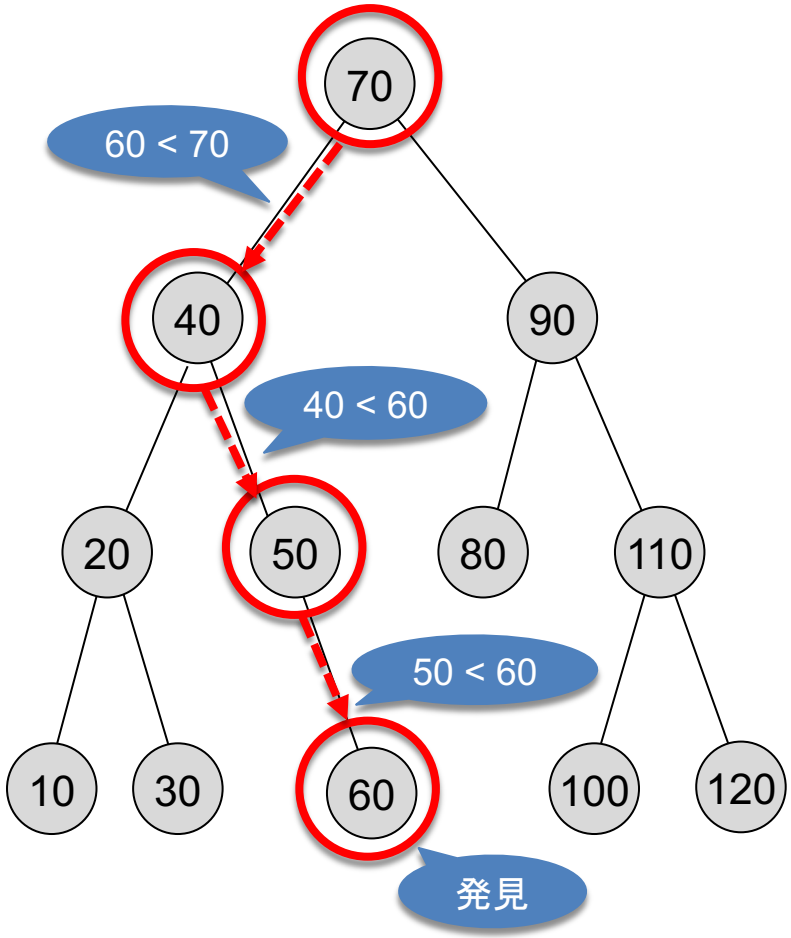
- 例



要素の探索と追加

- 要素の探索
  - 根から要素を比較していく
  - ノードとキーとの大小（前後）関係により，右または左の子をたどっていく
- 要素の追加
  - 探索によって要素を発見できなかったら，その位置に新しいノードを追加する
- 木のバランス
  - 理想的な2分探索木は？
  - そのときの平均計算量は？

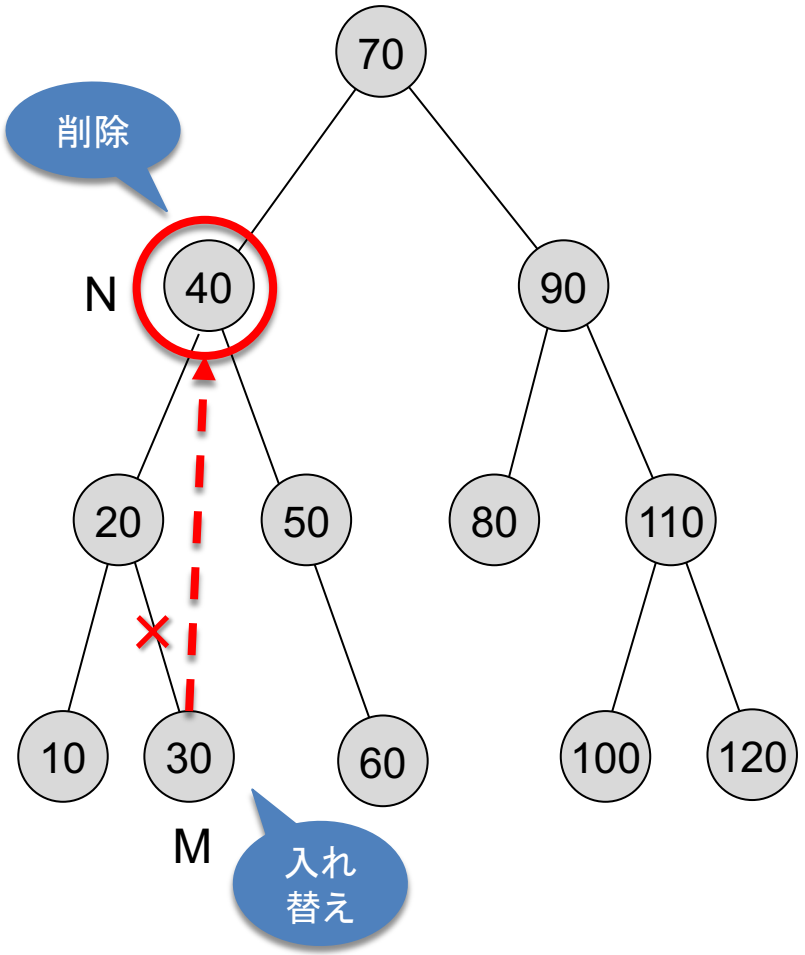
- 例
  - 60を探索する場合



要素の削除

- 削除するノードをNとする
- 場合A: Nの子が0個なら
  - 単にNの親からNへの辺を切る
- 場合B: Nの子が1個なら
  - Nの親から，Nを飛ばしてその ひとりっ子につなげ直す
- 場合C: Nの子が2個なら
  - Nの左の子孫から最大値の ノードMを求める（右の子孫 から最小値でもよい）
  - いったんMを削除する その際，Mの子の数に応じて 場合AまたはBの処理する
  - Nの位置にMを入れ替える （Nの子2個はMが引き継ぐ）

- 例
  - 場合Cで「40」を削除する例



確認問題

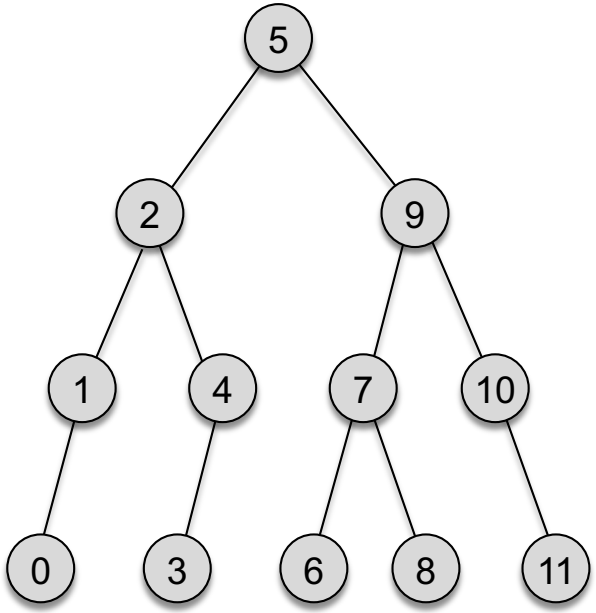
- 2分探索木の要素の追加
  - 空の2分探索木に，下記の(a)および(b)の順序で要素を追加したときにできる木を，それぞれ図示せよ

    (a) 4, 3, 5, 7, 1, 9, 2, 6, 8, 10

    (b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
  - それぞれの木から要素を探索する場合の平均比較回数を計算せよ

- 2分探索木の要素の削除
  - 右の2分探索木から下記の順序で要素を削除した後の木を図示せよ

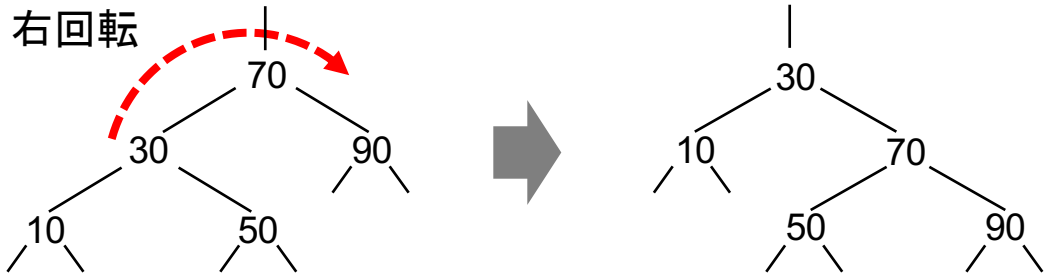
    1, 9, 5



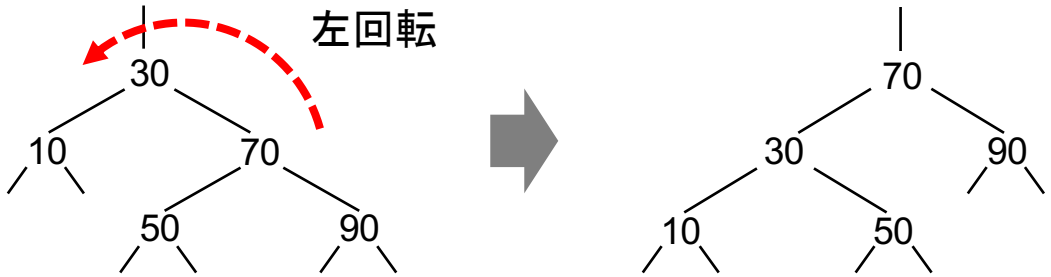
AVL木（平衡木の一種）

- 平衡木：バランスを維持する2分探索木
  - 回転操作：2分探索木の条件を保ったまま変形する操作
  - 下図をよく観察して，ノードの入れ替わりを理解すること！

右回転

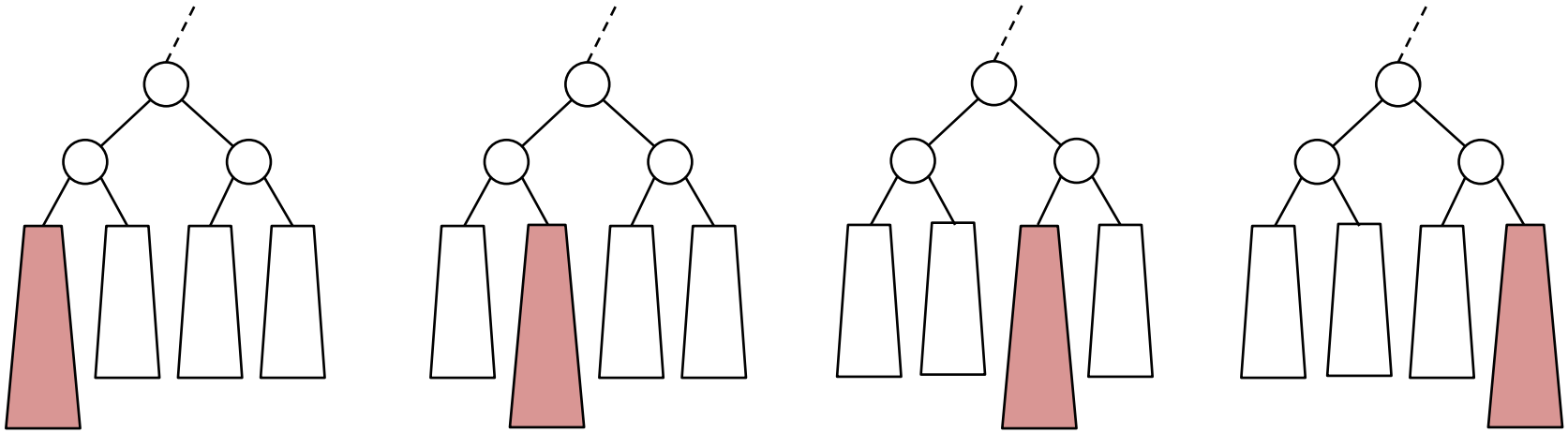


左回転



AVL木：バランスが崩れた状態

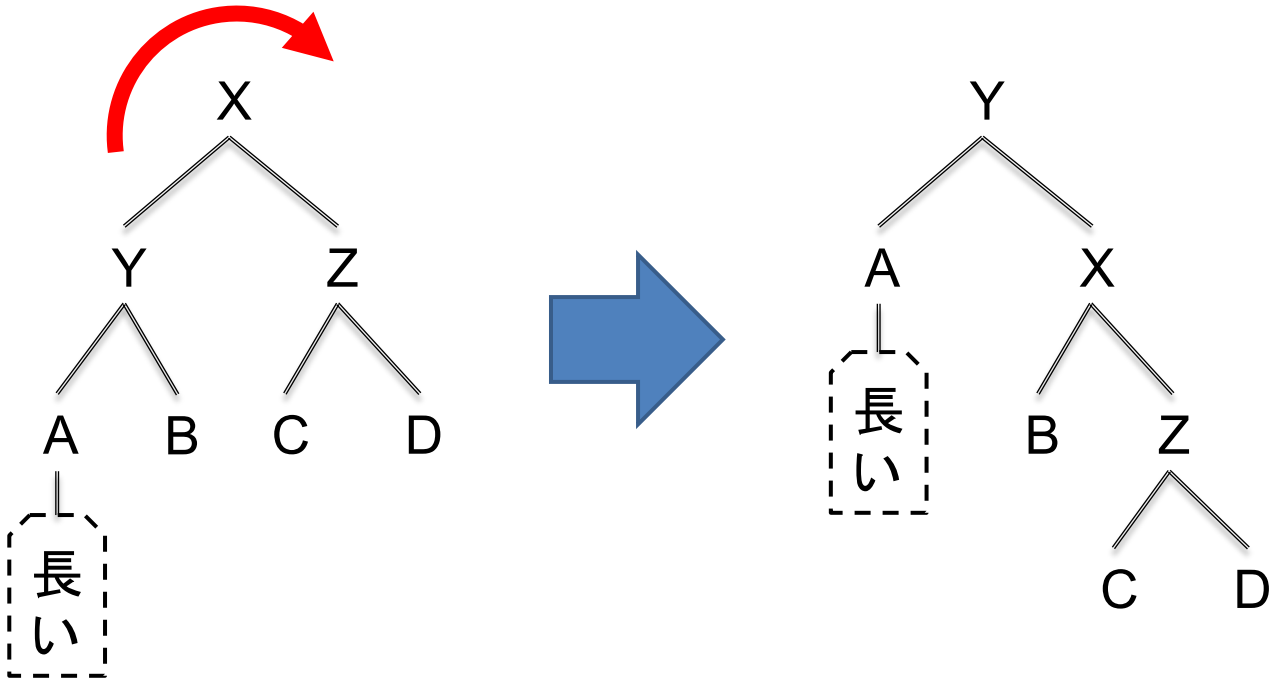
- 4パターンに整理して対処
  - まず，左右のバランスが崩れているノードを検出する
  - そのノードの孫ノードの下の状態（高さ）によって分類する



パターンA　パターンB　パターンC　パターンD

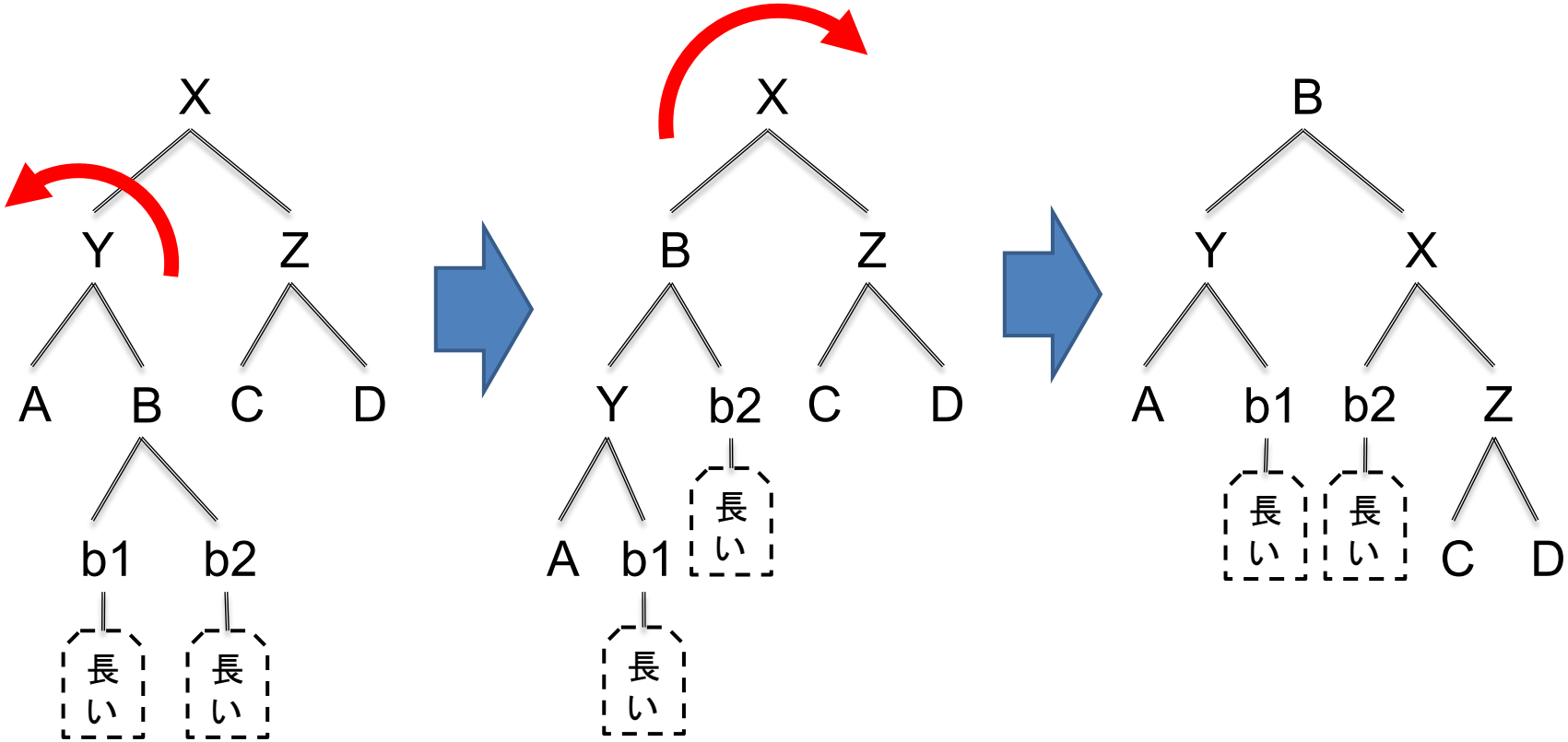
AVL木：1重回転

- パターンA，パターンD
  - 1回の回転操作によって，バランスが維持できる
  - パターンDはAと対照なので，回転を逆向きにすればよい



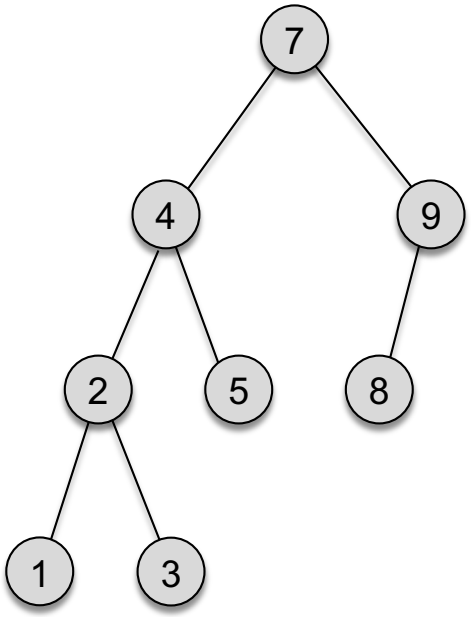
AVL木：2重回転

- パターンB，パターンC
  - バランスを維持するには，2回の回転操作が必要になる

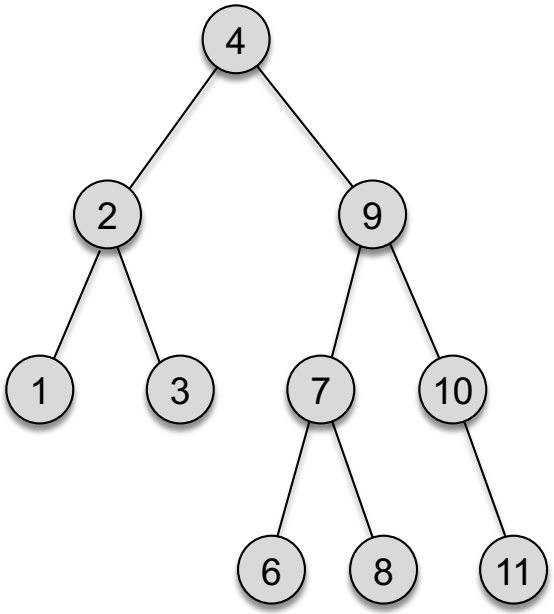


確認問題

- AVL木の回転
  - 下図(a)のAVL木から「8」を削除した後の木を図示せよ
  - 下図(b)のAVL木に「5」を追加した後の木を図示せよ



(a)



(b)