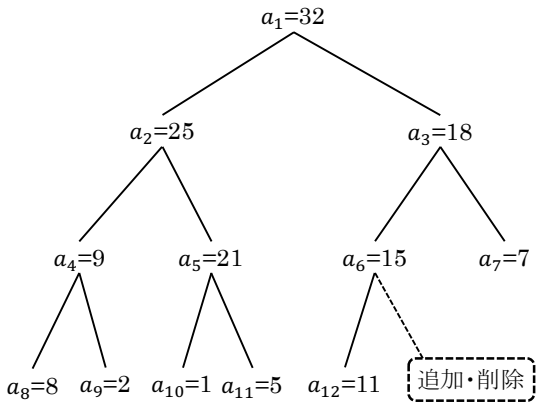
1. 2 分木において，図のように常に，親ノードの値≧子ノードの値という条件（またはその逆）が成り立つものを **2 分ヒープ**と呼ぶ。**ヒープソート**は配列の添字を使い，a_1を根としてa_kの左右の子をそれぞれa_{2k}，a_{2k+1}と定義することでほぼ平衡な 2 分木を構築する（今回は簡単のためa_0（a[0]）は使わない）。

   ヒープの構築は根（a_1）だけのヒープから始めて，末尾に要素を追加していく方法が簡単である。追加された要素は，順々に親と比較・交換しながら，ヒープの条件（親ノードの値≧子ノード）を満たす位置まで上げていく。この操作を**アップヒープ**と呼ぶ。

   ヒープでは最大値が根に来るので，根の値を取り出しながらヒープを再構築していくことでソートができる。根を取り出した後には，いったん末尾の要素を根に置き，順々に左右の子と比較・交換しながら，ヒープの条件を満たす位置まで下ろしていく。こちらの操作は**ダウンヒープ**と呼ぶ。

   下記に示したのは，ヒープソートのプログラム例である。空欄を適当に埋め，適当なクラス等を補って実行させて，ヒープソートのしくみを理解せよ。

   プログラムが理解できたら，a_0（a[0]）から配列の全要素をソートするためにはどう改良すればいいか考えてみよ。




```
// a[1]～a[last]をヒープソートで整列する
public static void heapSort(double[] a, int last) {

    // ヒープになっている領域を 1 つずつ広げていく
    for (int i = 1; i <= last; i++)
        upHeap(a, i);

    // 最大値を取り出し，ヒープを 1 つずつ縮めていく
    for (int i = last; i >= 2; i--)
        downHeap(a, i);
}

// アップヒープ操作： a[1]～a[last-1]のヒープができているとき，
// a[last]を追加してからヒープを再構成して a[1]～a[last]に 1 つ分広げる
private static void upHeap(double[] a, int last) {

    // 追加要素の添字を i として，順々に親と比較して上げていく
    int i = last;

    for (;;) {
        // a[i]の親 a[j]の添字 j を計算で求める
        int j =

        // 親がいないか親の方が大きかったら，もう上げる必要はないのでループから脱する
        if (j == 0 || a[   ] >= a[   ])
            break;

        // 親の方が小さければ、追加要素を親と交換して一段上げる
        swap(a, i, j);

        // 追加要素の新しい位置を i とする
        i =

    }
}
```

```
// ダウンヒープ操作： a[1]～a[last]のヒープができているとき，
// 根（a[1]）にある最大値を a[last]と交換し，ヒープを再構成して a[1]～a[last-1]に 1 つ分縮める
private static void downHeap(double a[], int last) {

    // まず a[1]（最大値）を a[last]と交換し，a[last]を切り離す
    swap(a, 1, last);

    // いったん根に上げた要素 a[1]を，順々に下げていく
    int i = 1;

    for (;;) {
        // a[i]の左の子 a[j]の添字 j を計算で求める
        int j =

        // j が範囲外ならもう子はいないので，ループから脱する
        if (j >= last) break;

        // 右にも子がいて左の子よりも大きかったら，右の子を比較対象に再設定する
        if (j + 1 < last && a[   ] < a[       ])
            j = j + 1;

        // 子の方が小さかったらもう下げる必要はないので，ループから脱する
        if (a[   ] >= a[   ]) break;

        // 子の方が大きければ，いったん上げた要素を子と交換して一段下げる
        swap(a, i, j);

        // いったん上げた要素の新しい位置を i とする
        i =

    }
}

// 配列要素の交換
private static void swap(double[] a, int i, int j) {
    double t = a[j];
    a[j] = a[i];
    a[i] = t;
}
```

2. 要素数をn個としたときのヒープソートの平均計算量を考えてみよう。
   (a) 完全 2 分木では，1 段目の要素は 1 個，2 段目の要素は 2 個，3 段目の要素は 4 個である。h段目の要素は何個か考え，1 段目からh段目までの合計の要素数kをhの式で表せ。

   (b) 上の式を変形し，要素数がk個のときのヒープの高さhを表す式を求めよ。整数化はしなくてよい。

   (c) ヒープの高さがhのとき，1 回のアップヒープまたはダウンヒープにおける比較・交換処理の回数の期待値は$h/2$ となる。よって，ヒープを 0 個からn個まで広げる過程と逆に縮める過程の合計の計算量は以下の式に比例する。log の和の性質を用いて，この式を階乗（$n!$）を用いた形に変形せよ。

   $$\sum_{k=0}^{n-1} h = \log_2 1 + \log_2 2 + \cdots + \log_2(k+1) + \cdots + \log_2[(n-1)+1] =$$

   (d) 「スターリングの公式（近似）」を用いて，ヒープソートの平均計算量が$O(n \log n)$となることを示せ。